



واحد علوم و تحقیقات

# دینامیک سازه‌ها

## Dynamics of Structures

استاد: دکتر شیدایی

دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات



دینامیک سازه ها

Dynamics of Structures

## سرفصل درس:

- تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی
- انواع بارهای دینامیکی
- درجات آزادی و نحوه مدل کردن سازه ها
- معادلات حرکت درسیستم های یک درجه آزادی
- ارتعاش آزاد سیستم های یک درجه آزادی
- تحلیل دینامیکی سیستم های یک درجه آزادی درمقابل انواع بارها (هارمونیک، تناوبی، ضربه‌ای ...)
- روش انتگرال دیوهامل و تحلیل سیستم ها به این روش
- رفتار غیرخطی سیستم های یک درجه آزادی در حالت دینامیکی



## سرفصل درس:

- تعیین معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی
- ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی و تعیین مقادیر ویژه و مدهای ارتعاشی
- روش ترکیب اثر مدها (آنالیز مودال) جهت تحلیل سیستم های چند درجه آزادی
- روش انتگرال گیری مستقیم جهت تحلیل سیستم های یک و چند درجه آزادی
- روش فرکانسی جهت تحلیل سیستم های یک و چند درجه آزادی
- تحلیل دینامیکی سیستم های پیوسته ساده

# References

- 1) Dynamics of Structures : Theory and Application to Earthquake Engineering, A. Chopra, Prentice Hall
- 2) Dynamics of Structures , R.W. Clough and J. Penzin, Mc Graw–Hill
- 3) Dynamics of Structures , J.L. Humar, Prentice Hall
- 4) Structural of Dynamics : Theory and Computation, M. Paz, Van Nostrand Reinhold

# فصل اول

## مقدمه ای بر دینامیک سازه ها

# مقدمه ای بر دینامیک سازه ها

**تعریف:** واژه دینامیک را می توان بطور ساده به عنوان متغیر زمانی تعریف کرد. بنابراین بار دینامیکی باری است که مقدار، راستا، یا موقعیت آن با زمان تغییر کند. به این ترتیب پاسخ سازه در مقابل بار دینامیکی، مثلا تغییرمکانها و یا تنشهای حاصله نیز به صورت متغیر زمانی یا دینامیکی است.

## نمونه هایی از بارگذاری دینامیکی سازه ها :

بار باد، بارزلزله، نیروهای ناشی از امواج بر سازه های دریایی، اثر انفجار بر سازه ها، ارتعاش پلها تحت بارهای متحرک و...

## دورنمای مباحث:

تحریک EXCITATION
بار زنده
باد
زلزله
انفجار-ضربه

سازه STRUCTURE
منبع آب
پل ساختمان
سد
خط لوله

پاسخ RESPONSE
جسم صلب بدون تغییرشکل
جسم انعطاف پذیر

# تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی :

## ویژگی های متمایز کننده مسائل دینامیکی

(۱) متغییر زمانی بودن

(۲) وارد شدن نیروهای اینرسی در معادلات تعادل

(۳) میرایی

# تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی :

## توضیح:

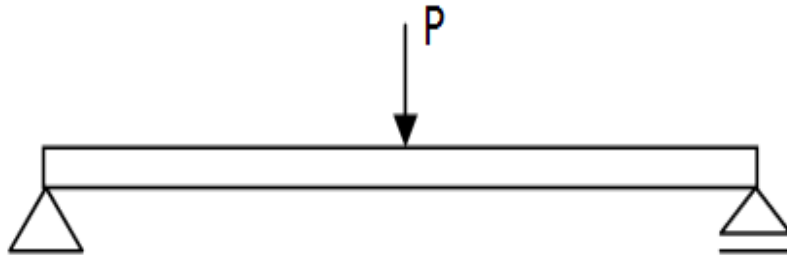
(۱) اولین تفاوت قابل توجه، متغیر زمانی بودن مسائل دینامیکی است. در مسائل دینامیکی بارگذاری و در نتیجه پاسخ های سازه شامل: تغییر مکانها، نیروهای داخلی و مانند اینها، همگی با زمان تغییر می کنند بنابراین در تحلیل دینامیکی بر خلاف تحلیل استاتیکی نمی توان به یک پاسخ ثابت دست یافت، بلکه پاسخ را باید در طی زمان و در لحظه های متفاوت بدست آورد. بنابراین تحلیل دینامیکی بسیار وقت گیرتر و پیچیده تر از تحلیل استاتیکی است. (تحلیل تاریخچه زمانی)

(۲) در مسایل دینامیکی از آنجا که تغییر مکانها وابسته به زمان هستند سبب ایجاد شتاب (و سرعت) در سازه می شوند برای مقابله با شتاب نیروهای اینرسی ایجاد می شود. نیروهای داخلی سازه نه تنها می باید با بارگذاری اعمال شده بر آن در تعادل باشد بلکه بایستی با نیروهای اینرسی ناشی از شتاب (و میرایی ناشی از سرعت) نیز در تعادل باشد.

## تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی :

نیروهای اینرسی که در مقابل شتابهای سازه مقاومت می کنند مهمترین وجه تمایز یک مساله دینامیک سازه می باشند.

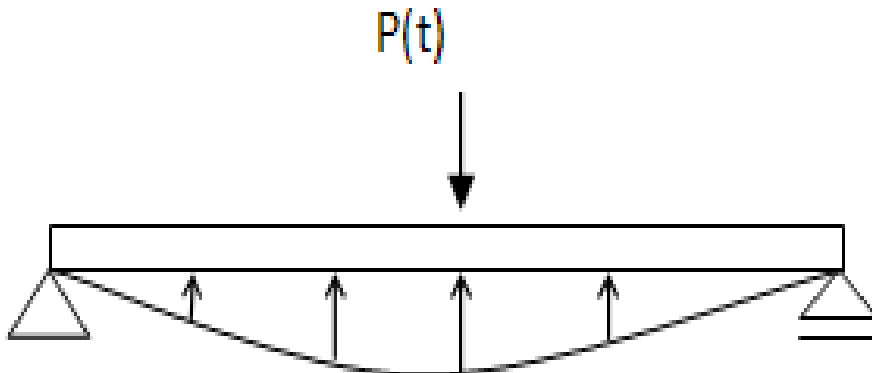
مثلا تیر ساده مطابق شکل زیر که تحت بار استاتیکی  $P$  قرار دارد در نظر گرفته می شود. لنگر داخلی ، برش و تغییر شکل آن، بستگی مستقیم به بار اعمال شده داشته و می توان آن را با استفاده از اصول تعادل نیروها محاسبه کرد.



## تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی :

6

از طرف دیگر اگر مطابق شکل زیر  $P(t)$  به صورت دینامیکی وارد شود تغییر مکان تیر به شتابهایی که ایجاد کننده نیروهای اینرسی مقاوم درمقابل شتابهاست بستگی خواهد داشت. در این حالت لنگر داخلی و برش نه تنها بایستی در تعادل با نیروی خارجی وارد شده باشد بلکه باید با نیروی اینرسی ناشی از شتابهای تیر نیز در تعادل باشد.





## تفاوت تحلیل های استاتیکی و دینامیکی :

۳) پدیده دیگری نیز در مساله های دینامیک سازه دخالت می کند که میرایی خوانده می شود. بخشی از انرژی حرکتی بوسیله میرایی در سازه ها اتلاف می گردد. در یک ساختمان مالش در اتصالات فولادی، باز و بسته شدن ترک های مویی در بتن، اصطکاک میان اعضای سازه ای و پرکننده ها از جمله عامل های ایجاد میرایی هستند. میرایی خود نیز از نیروهای مقاوم در برابر حرکت سازه است. برای مدلسازی میرایی در سازه ها معمولا از نوعی میرایی به نام میرایی لزجی استفاده می شود. در این مدل میرایی متناسب با سرعت می باشد .

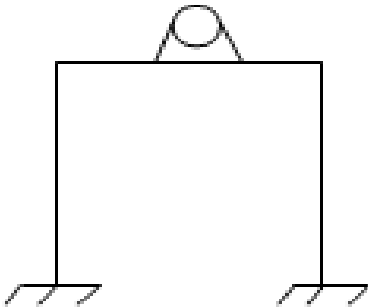
# انواع بار گذاری دینامیکی :

8

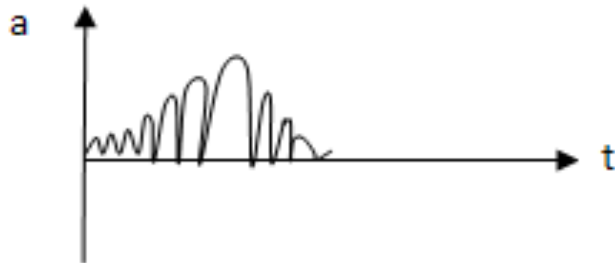
**الف)** بار گذاری دینامیکی قطعی (معین)

Prescribed (Deterministic) dynamic Loading

در این نوع بار گذاری تغییرات بار نسبت به زمان کاملا مشخص است نظیر:



- ماشین چرخان



- زلزله های پیشین

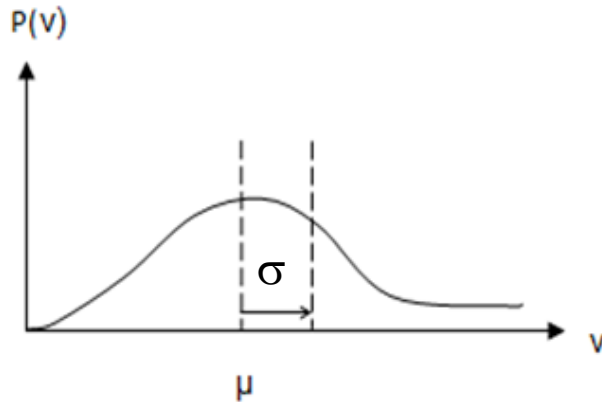
# انواع بار گذاری دینامیکی :

9

(ب) بار گذاری دینامیکی تصادفی (نامعین)

## Random dynamic loading

تغییرات بار نسبت به زمان کاملا مشخص نبوده و به صورت آماری بیان می شود.



- بار باد

- زلزله های آتی

# روشهای محاسبه پاسخ دینامیکی سازه ها :

به تبع تقسیم بندی کلی فوق برای انواع بارگذاری دینامیکی، دو روش مختلف برای محاسبه واکنش سازه ها نسبت به بار گذاری دینامیکی وجود دارد.

## Deterministic Approach

### (۱) روش قطعی

تحلیل پاسخ هر سیستم سازه ای تحت بار دینامیکی معین را تحلیل قطعی می نامیم.

## Nondeterministic Approach

### (۲) روش غیر قطعی

تحلیل پاسخ نسبت به بارگذاری دینامیکی تصادفی را تحلیل غیر قطعی می نامیم.

## روشهای محاسبه پاسخ دینامیکی سازه ها :

بطور کلی پاسخ سازه به هر نوع بارگذاری دینامیکی بر حسب تغییرمکانهای سازه بیان می شود. بنابراین طبق روش تحلیل قطعی، تاریخچه زمانی تغییرمکان ناشی از هر بارگذاری بدست می آید، دیگر مشخصات پاسخ سازه مثل تنشها، کرنشها و نیروهای داخلی و غیره، معمولا در مرحله دوم تحلیل و به کمک تغییرمکانهایی که در مرحله قبل به دست آمده اند محاسبه می شود.

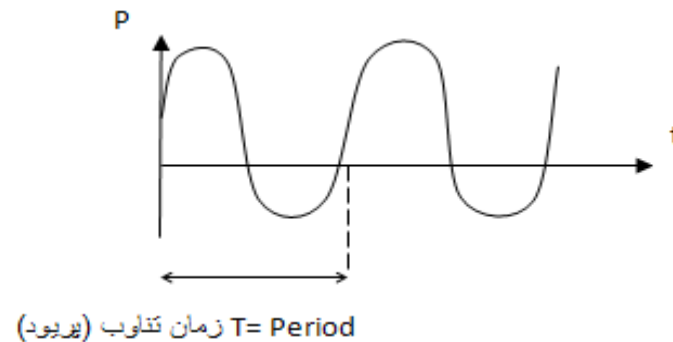
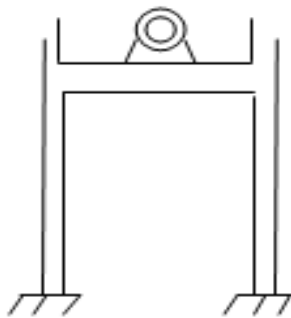
از طرف دیگر با انجام تحلیل غیرقطعی، اطلاعاتی آماری در مورد تغییرمکانهایی که حاصل یک بارگذاری آماری است بدست می آید در این روش، تاریخچه زمانی تغییرمکانها تعیین نمی شود و دیگر مشخصات پاسخ سازه از قبیل، تنشها، کرنشها و نیروهای داخلی به جای استفاده از نتایج تغییر مکانها، مستقیما بوسیله تحلیل مستقل از نوع غیرقطعی محاسبه می شوند.

# انواع بارگذاری معین :

## (۱) بارهای تناوبی

بارهایی هستند که در فواصل زمانی مساوی تکرار می شوند از قبیل:

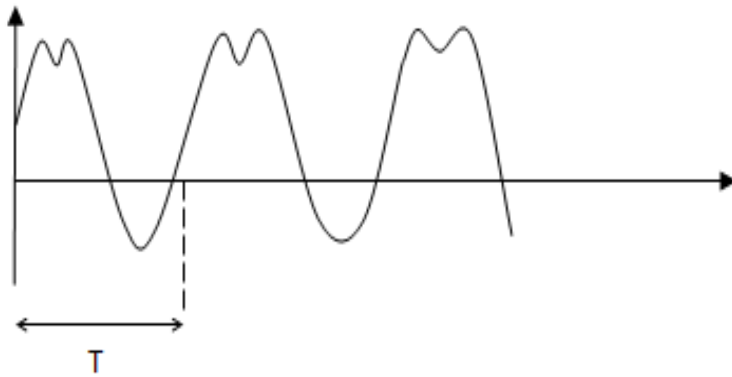
- بار هارمونیکی ساده: ساده ترین نوع بارگذاری تناوبی است و تغییرات آن بصورت سینوسی می باشد چنین باری در اثر وجود جرم خارج از مرکز در یک ماشین چرخان بوجود می آید.



## انواع بارگذاری معین :

13

- بارگذاری ناشی از فشار هیدرو استاتیک بوجود آمده توسط پره های ملخ کشتی برای انتهای کشتی، مثال دیگری از بارهای تناوبی است.



بارهای تناوبی اغلب می توانند شکل های پیچیده ای داشته باشند.

اغلب می توان با استفاده از روش های تحلیلی پاسخ سازه تحت بارهای تناوبی را محاسبه نمود. ( به کمک سری فوریه و نوشتن آنها به صورت مجموعه ای از بارهای هارمونیک )

## انواع بارگذاری معین :

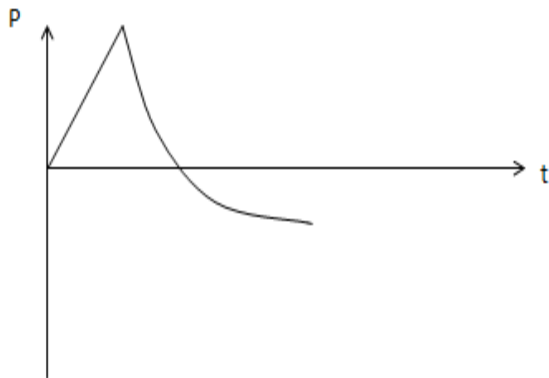
14

(۲) بارهای غیر تناوبی :

که به دو صورت هستند :

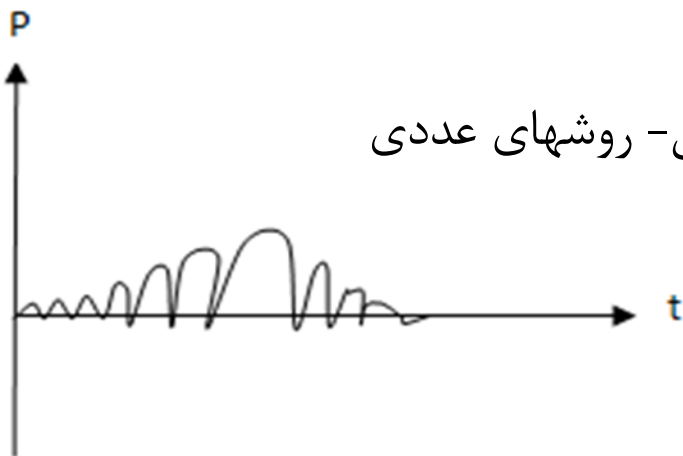
الف- بار کوتاه مدت ضربه ای، مانند بار ناشی از انفجار

امکان تحلیل به کمک روش های ساده و خاص



ب- بار بلند مدت، مانند زلزله :

تحلیل اغلب به کمک روشهای کلی تحلیل دینامیکی- روشهای عددی





# درجات آزادی دینامیکی :

**تعریف:** تعداد مولفه های مستقل تغییر مکان برای تعیین موقعیت تمامی جرمها نسبت به موقعیت اولیه شان، تعداد درجات دینامیکی (DOF) نامیده می شود.

در حالت کلی یک سیستم پیوسته دارای بی نهایت درجه آزادی است اما با انتخاب یک مدل تحلیلی مناسب می توان تعداد درجات آزادی را به تعدادی محدود و گاهی حتی یک درجه کاهش داد.

مدل تحلیلی یک مدل ایده آل از سازه است که مشابه مدل واقعی می باشد .

مدل های تحلیلی در حالت کلی به دو دسته تقسیم بندی می شوند :

Distributed (Continuous) Parameter

(۱) مدل های پیوسته

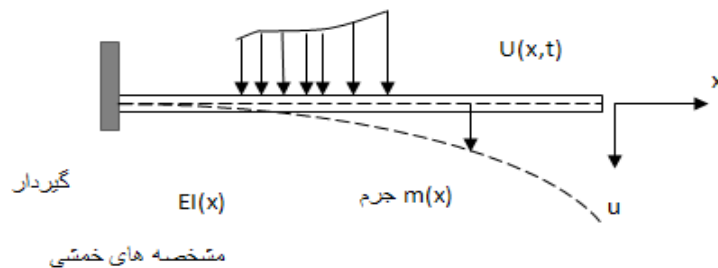
Discrete (Lumped mass) parameter

(۲) مدل های جرم متمرکز

## مدل های تحلیل سازه ای

### مدل های پیوسته

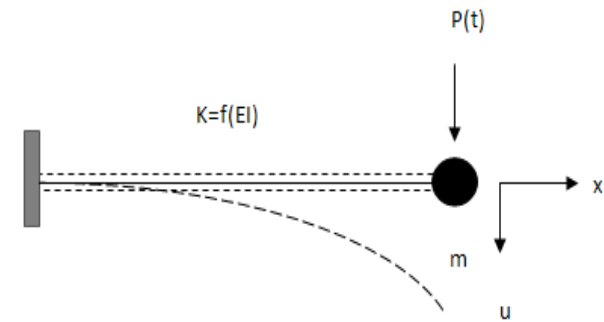
بارگذاری دینامیکی  $P(x,t)$



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x,t)$$

PDE

### مدل های جرم متمرکز



$$m\ddot{u} + ku = p(t)$$

ODE

# مدلهای جرم متمرکز

مدل های جرم متمرکز به دو دسته تقسیم بندی می شوند :

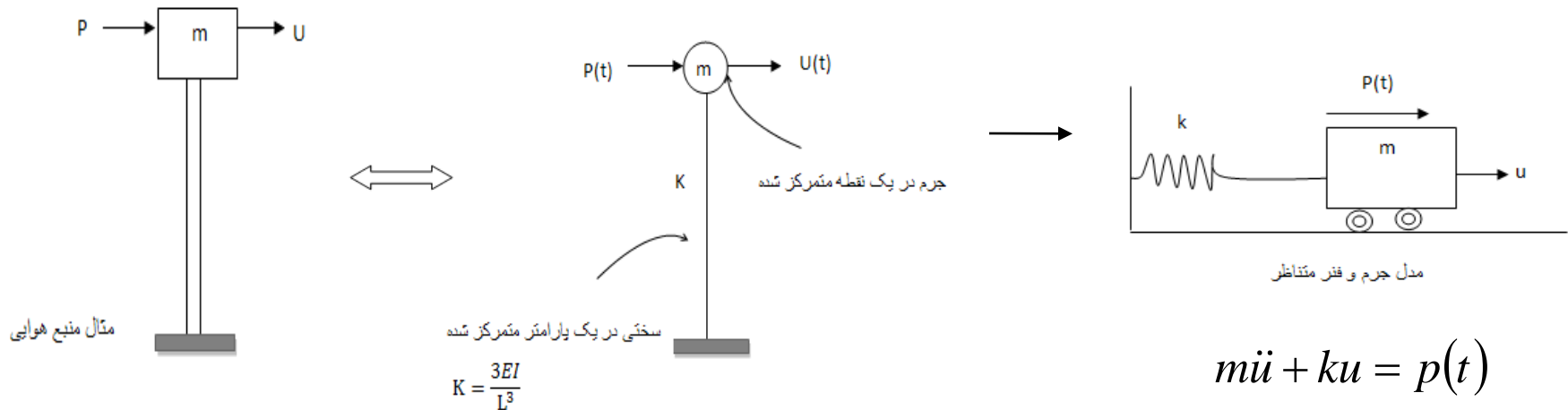
Single Degree Of Freedom (SDOF)

- یک درجه آزادی

Multiple Degree Of Freedom (MDOF)

- چند درجه آزادی

## (۱) مدل‌های جرم متمرکز یک درجه آزادی (SDOF)

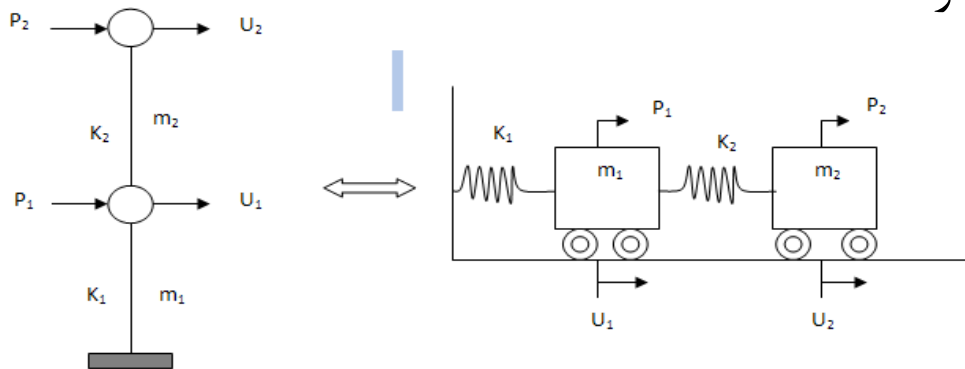


ویژگیهای کلی: مدل ایده آلی، سادگی تحلیل، تقریبی

## ۲) مدل‌های جرم متمرکز چند درجه آزادی (MDOF)

➤ جرم‌ها در چندین نقطه متمرکز شده اند

➤ سختی‌ها در چندین موقعیت متمرکز شده اند



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

ویژگیهای کلی: مدل واقع گرایانه، پیچیدگی تحلیل

# اجزای اساسی سیستم های دینامیکی

مشخصه های فیزیکی اصلی هر سیستم سازه ای الاستیک خطی تحت اثر بارهای دینامیکی عبارتند از:

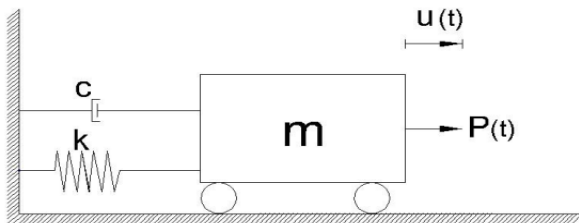
۱- خواص الاستیک (سختی یا نرمی)

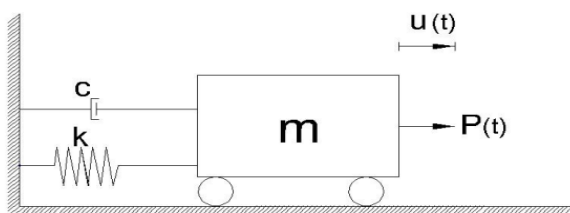
۲- مکانیزم اتلاف انرژی یا میرایی

۳- جرم

۴- بارگذاری یا محرک خارجی

در ساده ترین مدل تحلیلی از یک سیستم یک درجه آزادی فرض می شود هر کدام از مشخصه های فیزیکی فوق در یک المان فیزیکی متمرکز شده باشند.

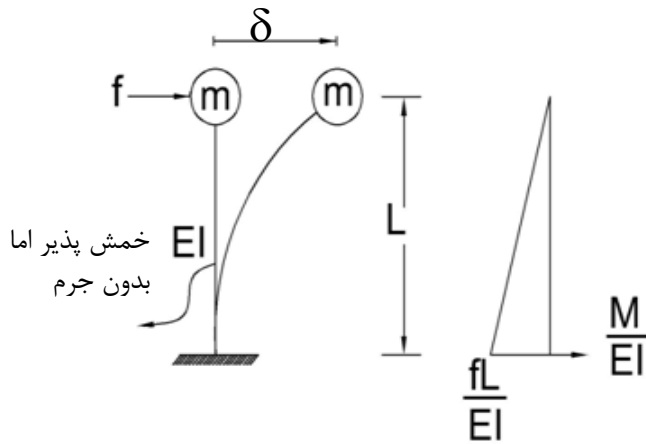




## در این مدل :

- کل جرم  $m$  این سیستم در یک قطعه المان صلب متمرکز شده است.
  - غلتکها باعث محدودیت حرکت این سیستم در یک جهت خاص شده است طوری که مختصه تغییر مکان  $u$  می تواند موقعیت آن را بطور کامل مشخص نماید .
  - مکانیزم اتلاف انرژی نیز توسط میرا کننده یا کمک فنر  $c$  نشان داده شده است .
  - بارگذاری خارجی این سیستم که باعث واکنش دینامیکی آن می شود بار متغیر زمانی  $p(t)$  است .
  - مقاومت الاستیک سیستم در مقابل تغییر مکان، توسط یک فنر بدون وزن به سختی  $k$  نشان داده شده است .
- در ادامه به توضیحات تکمیلی در رابطه با المان های فیزیکی سیستم های یک درجه آزادی می پردازیم .

# ۱- خواص الاستیک (فنر الاستیک)

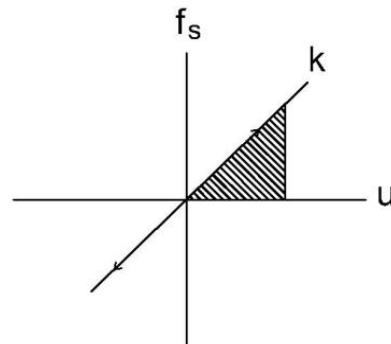
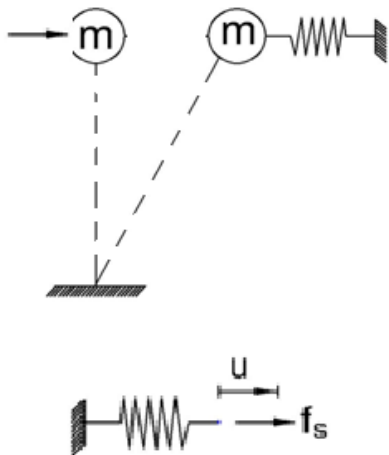


بنا به قضیه دوم لنگر سطح

$$\delta = \frac{f L}{EI} \cdot L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{f L^3}{3EI}$$

$$f = \frac{3EI}{L^3} \delta$$

$$f = k\delta$$

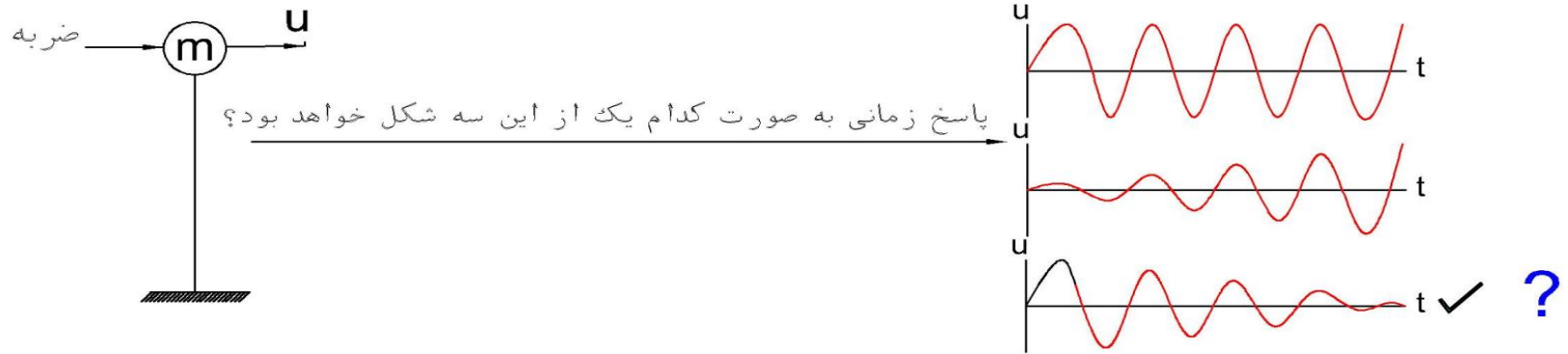


$$f = ku$$



## ۲- میرایی Damping

23



عاملی که باعث می شود ارتعاش آزاد یک سیستم به تدریج مستهلک شود میرایی نامیده می شود.

مکانیزم های مختلف اتلاف انرژی (میرایی) در یک سازه :

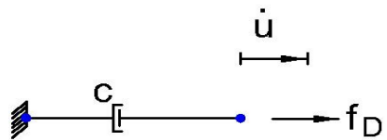
- اصطکاک در اتصالات فولادی
- باز و بسته شدن ترک های موئی در بتن
- اصطکاک میان عناصر سازه و ناسازه ای (نظیر دیوارهای جدا ساز)

...

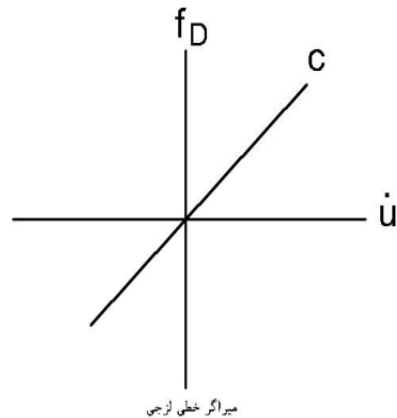
تعریف و اعمال دقیق مکانیسم میرایی در محاسبات امری ناممکن است.

از اینرو در عمل میرایی یک سیستم یک درجه آزادی با میرایی لزج معادل Equivalent Viscous Damping به کمک المان کمک فتر Dashpot ایده آل سازی می شود.

شکل زیر یک میراگر خطی لزجی را که تحت اثر نیروی  $f_D$  در امتداد درجه آزادی  $u$  قرار دارد نشان می دهد.



نیروی مقاوم میراگر مساوی و مخالف نیروی خارجی  $f_D$  می باشد. نیروی میرایی به سرعت  $\dot{u}$  در محل میراگر بستگی دارد.



$$f_D = c\dot{u}$$

$c$ : ضریب میرایی لزجی

ضریب میرایی لزجی  $c$  با اندازه گیری تجربی سرعت میرایی ارتعاش آزاد، قابل تعیین است.

### ۳- اینرسی ( Inertia )

26

اصل دالامبر :

هر جسم یک نیروی اینرسی ایجاد می کند که متناسب با شتاب آن بوده و در مقابل شتاب نیز مقاومت می کند. (در خلاف جهت شتاب است.)

$$f_i \leftarrow \boxed{m} \rightarrow \ddot{u} \quad f_i = m\ddot{u}$$

بر اساس قانون دوم نیوتن :

میزان تغییرات اندازه حرکت هر جسم  $m$  برابر است با نیروی وارد بر آن.

$$\vec{p}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right)$$

هدف اصلی از تحلیل دینامیکی قطعی سازه محاسبه تاریخچه زمانی تغییر مکان سازه تحت اثر بار دینامیکی وارده است.

معادلات حرکت عبارتند از روابطی ریاضی که نشان دهنده تغییر مکان های دینامیکی سازه می باشند. حل این معادلات حرکت، پاسخ سازه را به صورت تابعی از زمان به دست می دهد.

## روش های تشکیل معادلات حرکت:

➤ تعادل دینامیکی (اصل دالامبر یا تعادل مستقیم)

➤ اصل کار مجازی

➤ اصل هامیلتون

## تعداد دینامیکی ( استفاده از اصل دالامبر ) :

28

بنابه قانون دوم نیوتن : میزان تغییرات اندازه حرکت هر جرم  $m$  برابر است با نیروی وارد بر آن.

$$\vec{p}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right) \quad \vec{p}(t) : \text{ بردار نیروی برآیند وارده}$$
$$\vec{u}(t) : \text{ بردار موقعیت جرم } m$$

در اغلب مسائل مطرح در دینامیک سازه ها می توان فرض کرد جرم نسبت به زمان متغیر نمی باشد  
یعنی  
 $\frac{dm}{dt} = 0$   
لذا :

$$\vec{p}(t) = m \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} = m \vec{\ddot{u}}(t)$$

عبارت فوق بیان آشنای، نیرو مساوی است با حاصل ضرب جرم در شتاب می باشد، میتوان آن را  
بصورت زیر نوشت:

$$\vec{p}(t) - m \vec{\ddot{u}}(t) = 0$$

که جمله دوم  $m \vec{\ddot{u}}(t)$  نیروی اینرسی نامیده می شود که مقاوم در برابر شتاب جرم است.

# تعادل دینامیکی ( استفاده از اصل دالامبر ) :

## اصل دالامبر :

هر جسم یک نیروی اینرسی ایجاد می کند که متناسب با شتاب آن بوده و در مقابل شتاب نیز مقابله می کند

$$\vec{p}(t) - m\ddot{\vec{u}}(t) = 0$$

نیروی  $\vec{p}(t)$  را می توان شامل هر نوع بار عامل بر جسم دانست :

■ نیروی الاستیک مقاوم در برابر تغییر مکان

■ نیروهای میرایی مقاوم در برابر سرعت

■ هر بارگذاری مستقل خارجی

## تعادل دینامیکی ( استفاده از اصل دالامبر ) :

طبق اصل دالامبر نیروی اینرسی یک نیروی مجازی در نظر گرفته می شود که مقدار آن مساوی حاصلضرب جرم در شتاب و جهت آن مخالف با جهت حرکت است.

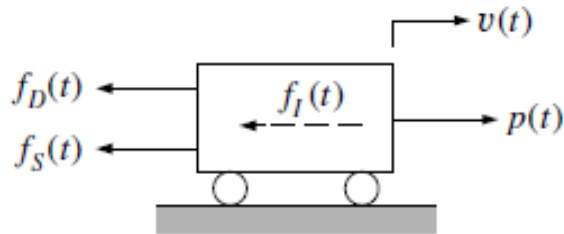
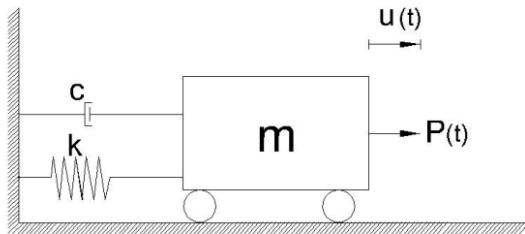
ملاحظه می گردد که با منظور کردن نیروی اینرسی، سیستم در هر لحظه در حال تعادل است.

بنابراین در این روش برای استخراج معادلات حرکت با رسم نمودار پیکره آزاد جسم متحرک، بامنظور کردن نیروی اینرسی در خلاف جهت حرکت، مجموع نیروهای موثر بر سازه مساوی صفر قرار داده می شود.



# تعال دینامیکی ( استفاده از اصل دالامبر ) :

31



$p(t)$  اعمال بار

$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$  پاسخ سیستم

$p(t), f_I, f_D, f_S$  سیستم نیروها

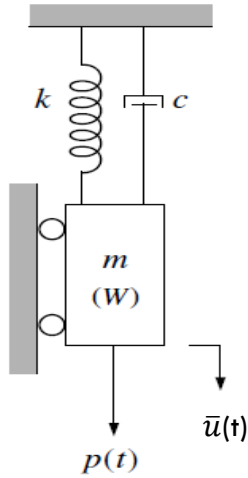
معادله حرکت، همان معادله تعادل همه این نیروهاست:

$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

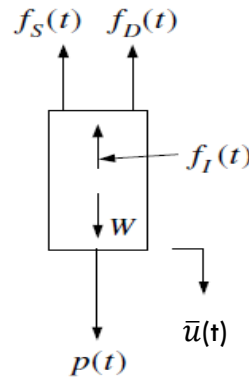
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

در ادامه مثال هایی در رابطه با تاثیر چهارچوب مرجع انتخابی ذکر می شود.

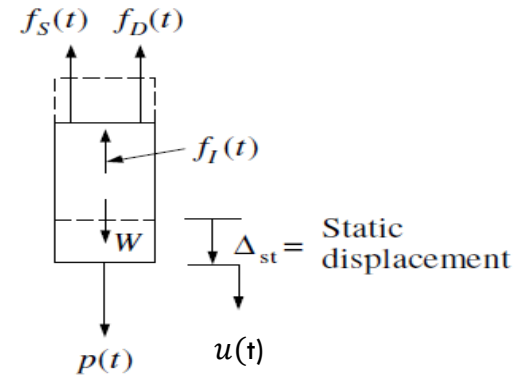
# مثال ۱: تاثیر نیروهای ثقی در معادله حرکت



(a)



(b)



(c)

سیستم شکل فوق مانند سیستم قبلی است با این تفاوت که ۹۰ درجه چرخانده شده و در نتیجه نیروهای ثقی در جهت تغییر مکان بر آن اثر می کنند.

$\bar{u}$  تغییر مکان کل (تغییر مکان از وضعیت تغییر شکل نیافته) مجموع تغییر مکان استاتیک ناشی از وزن  $w=mg$  و تغییر مکان اضافی دینامیکی  $u$  (که از وضعیت تغییر شکل یافته استاتیکی اندازه

گیری می شود) می باشد.

## مثال ۱ : تاثیر نیروهای ثقلی در معادله حرکت

33

$\bar{u}$  : تغییر مکان کل

$u$  : تغییر مکان دینامیکی

$\Delta_{st}$  : تغییر مکان استاتیکی ناشی از وزن

$$\Delta_{st} = \frac{w}{k} = \frac{mg}{k}$$

$$\bar{u} = u + \Delta_{st} \rightarrow \dot{\bar{u}} = \dot{u} , \ddot{\bar{u}} = \ddot{u}$$

رابطه تعادل نیروها :

$$p(t) + w - f_I - f_D - f_S = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\bar{u} = p(t) + w$$

## مثال ۱: تاثیر نیروهای ثقلی در معادله حرکت

و با توجه به اینکه  $k \Delta_{st} = w$  خواهیم داشت:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

**نتیجه مهم:** اگر منظور تعیین تغییر مکان ها پس از تغییر شکل استاتیکی سیستم باشد، می توان نیروهای ثقلی را از معادله حرکت حذف کرد.

البته برای بدست آوردن مواردی چون تغییر مکان کل و تنش کل باید مقادیر بدست آمده با مقادیر متناظر استاتیکی جمع شود.

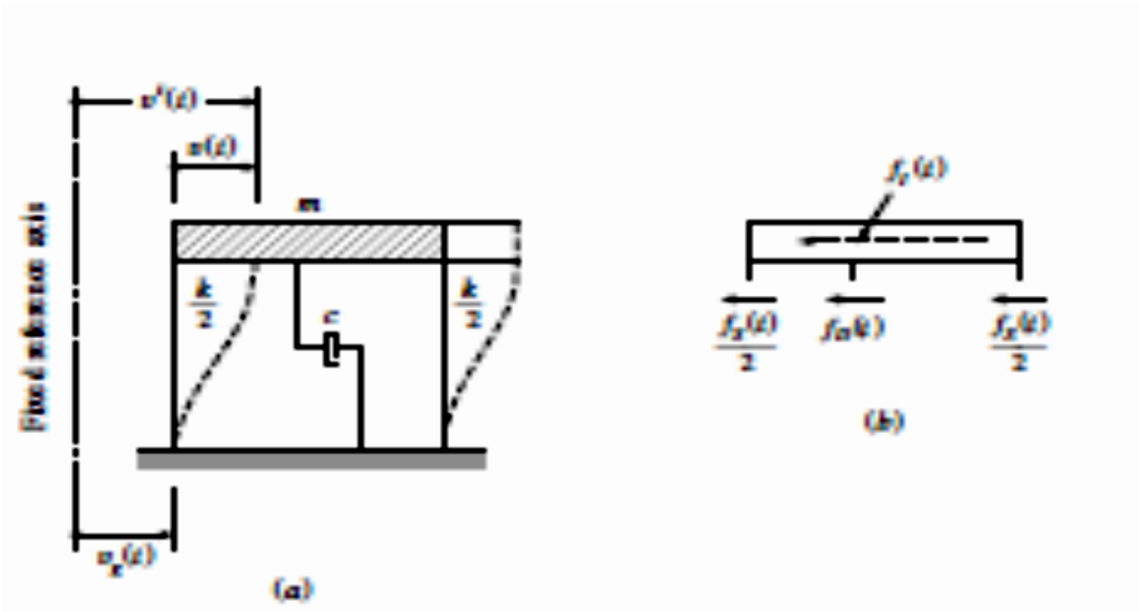
## مثال ۲: تاثیر تحریک تکیه گاهی در معادلات حرکت

35

پاسخ دینامیکی سازه نه تنها بر اثر اعمال بار متغیر زمانی، بلکه بر اثر حرکت تکیه گاهی (مثلا تحت اثر زلزله) می تواند پدید آید.

مدل ساده ای از یک سازه تحت تحریک زلزله در شکل زیر نشان داده شده است.

حرکت افقی زمین بر اثر زلزله توسط تغییر مکان  $u_g(t)$  پایه سازه نسبت به یک محور ثابت مشخص شده است.



## مثال ۲: تاثیر تحریک تکیه گاهی در معادلات حرکت

در این مدل که اصطلاحاً مدل سازه برشی نامیده می شود فرض می شود:

**(الف)** تیر افقی قاب صلب باشد و تمام جرم سازه در آن متمرکز شده باشد.

**(ب)** ستون های قائم بدون وزن و در جهت قائم (امتداد محور ستون) دارای تغییر طول

نمی باشند و مقاومت آنها در مقابل تغییر مکان جانبی تیر با ضریب سختی  $k$  نشان داده

شده است (در اینجا برای سادگی سختی هر ستون  $k/2$  در نظر گرفته شده است)

به این ترتیب جرم  $m$  دارای یک درجه آزادی حرکت جانبی  $u$  می باشد که به خمش ستونها بستگی دارد.

## مثال ۲: تاثیر تحریک تکیه گاهی در معادلات حرکت

37

رابطه تعادل نیروها :  $f_I + f_D + f_S = 0$

نیروهای الاستیک و میرایی به تغییر مکان و سرعت نسبی بستگی دارند، در حالی که نیروی اینرسی همواره بر اساس تغییر مکان مطلق بدست می آید و وابسته به  $\ddot{u}^t$  است یعنی:

$$f_s = ku \quad , \quad f_D = c\dot{u} \quad , \quad f_I = m\ddot{u}^t$$

با جایگذاری در رابطه فوق :

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$$

برای حل این معادله ابتدا بایستی تمامی نیروها بر حسب یک متغیر یکسان نوشته شوند با توجه

$$u^t = u + u_g \quad \rightarrow \quad \ddot{u}^t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$$

به اینکه

## مثال ۲: تاثیر تحریک تکیه گاهی در معادلات حرکت

با جایگذاری در رابطه فوق داریم :

$$m\ddot{u} + m\ddot{u}_g + c\dot{u} + ku = 0$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g = p_{eff}^{(t)}$$

در این معادله  $p_{eff}^{(t)}$  بار موثر تحریک تکیه گاهی می باشد. یعنی حرکت زمین بصورت یک نیروی اینرسی بر سازه اثر می کند.

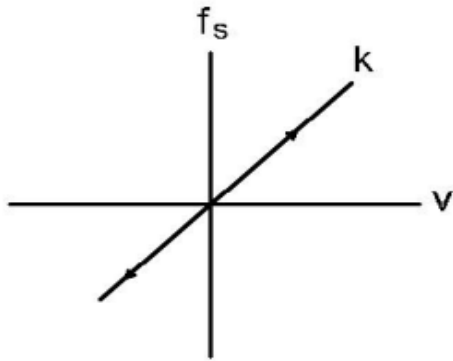
واکنش سازه نسبت به شتاب زمین دقیقاً همانند واکنش آن نسبت به بارهای خارجی  $p(t)$  است که مساوی حاصلضرب جرم سازه در شتاب زمین است.



## فنرهای موازی و سری :

39

رابطه نیرو- تغییر مکان فنر در محدوده خطی به شکل زیر است



$$f_s = kv$$

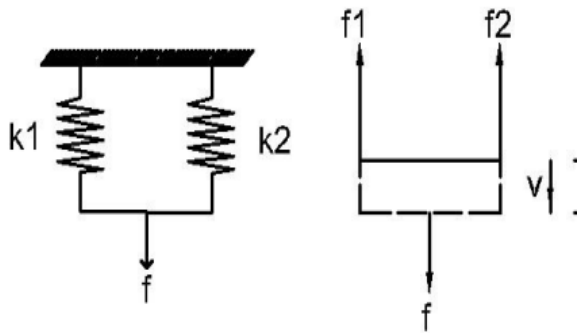
سختی  $k$  عبارت است از نیروی لازم برای ایجاد تغییر مکان واحد.

در صورتی که چند فنر به صورت موازی یا سری در یک سیستم مورد استفاده قرار گیرند می توان این مجموعه فنرها را با یک فنر معادل جایگزین کرد طوری که عملکرد مشابهی داشته باشد در این صورت بایستی سختی فنر معادل تعیین شود.

# فنرهای موازی و سری :

## فنرهای موازی :

در این حالت دو فنر بیک اندازه جابجا می شوند ولی نیروهای داخلی آنها به علت اختلاف سختی‌هایشان متفاوت می باشند.



$$v_1 = v_2 = v \quad , \quad f_1 + f_2 = f$$

$$f_1 = k_1 v \quad , \quad f_2 = k_2 v$$

$$f = f_1 + f_2 = k_1 v + k_2 v$$

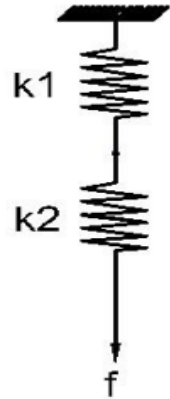
اگر سختی فنر معادل فرض شود رابطه نیرو- تغییر مکان فنر بصورت خواهد بود، پس:

$$k_e = k_1 + k_2$$

به همین ترتیب سختی معادل  $n$  فنر موازی  $k_e = \sum_{i=1}^n k_i$  خواهد بود.

# فنرهای موازی و سری :

## فنرهای سری :



در این حالت نیروی داخلی فنرها مساوی است ولی تغییر طول های متفاوتی دارند :

رابطه نیرو- تغییر مکان فنر بصورت  $f = k_e v$  خواهد بود، پس :  $v = \frac{f}{k_e}$

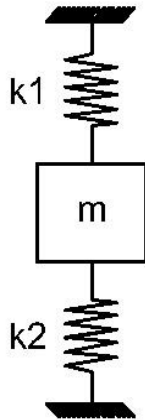
جابجایی کل انتهای مجموعه فنرها برابر مجموع تغییر طول فنرها است لذا :

$$v = v_1 + v_2 \rightarrow \frac{f}{k_e} = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2} \rightarrow \frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

به همین ترتیب سختی معادل  $n$  فنر سری به صورت  $\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$  خواهد بود.

## فنرهای موازی و سری :

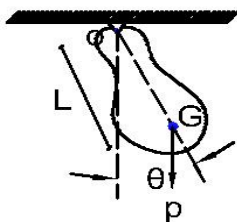
42



**توجه:** دو فنر هم امتداد در دو طرف جرم  $m$  مانند دو فنر موازی عمل می کنند و سختی های آن دو به یکدیگر افزوده می شود. ( توجه گردد که در این حالت فنرهای موازی دو فنر به یک اندازه جابجا می شوند ولی نیروهای داخلی شان به علت اختلاف سختی هایشان متفاوت است)

## مثال ۳: استخراج معادله حرکت یک جسم دوار بر حسب زاویه چرخش

43



**توضیح :**

قانون دوم نیوتن که در مورد یک ذره بصورت  $\sum f = m\ddot{u}$  نوشته می شود در مورد حرکت اجسام صلب نازک در صفحه بصورت دو معادله نیرویی و یک معادله لنگر نوشته می شود .

$$\sum f_x = m\ddot{u}_{Gx} \quad , \quad \sum f_y = m\ddot{u}_{Gy}$$

که  $\ddot{u}_{Gy}$  ,  $\ddot{u}_{Gx}$  شتابهای انتقالی مرکز جرم نسبت به دستگاه مختصات دلخواه می باشند و معادله تعادل دینامیکی لنگر را حول هر نقطه دلخواهی می توان نوشت:

$$\text{معادله تعادل لنگر حول مرکز جرم } G \quad \sum M_G = I_G \alpha$$

یا

$$\text{معادله تعادل لنگر حول محور چرخش } O \quad \sum M_O = I_O \alpha$$

در روابط فوق  $\alpha = \ddot{\theta}$  شتاب زاویه ای چرخش جسم صلب ،  $I_G$  ممان اینرسی جرمی حول محور ماربر مرکز جرم  $G$  ،  $I_O$  ممان اینرسی جرمی حول محور عمود بر نقطه  $O$  می باشد.

## مثال ۳: استخراج معادله حرکت یک جسم دوار بر حسب زاویه چرخش

روابط فوق نشان می دهند که در نوشتن معادله تعادل دینامیکی لنگر، باید لنگر اینرسی به عنوان یک لنگر مجازی در نظر گرفته شود که مقدار آن مساوی حاصلضرب ممان اینرسی جرمی در شتاب زاویه ای و جهت آن مخالف جهت حرکت دورانی است.

$$\begin{aligned}\sum M_0 &= I_0 \alpha \\ -pl \sin \theta &= I_0 \ddot{\theta} \\ I_0 \ddot{\theta} + pl \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

برای چرخش کوچک :

$$\begin{aligned}I_0 \ddot{\theta} + pl \theta &= 0 \\ I_0 &= I_G + mL^2 \\ (I_G + mL^2) \ddot{\theta} + pl \theta &= 0\end{aligned}$$

استخراج معادلات حرکت مربوط به سیستم های بزرگ و پیچیده به روش تعادل دینامیکی، مشکل است.

### طبق اصل کار مجازی :

اگر به سیستمی که تحت اثر مجموعه ای از نیروها در حال تعادل است تغییر مکان مجازی کوچکی اعمال شود که از نظر سینماتیکی قابل قبول باشد (یعنی شرایط مرزی را اقلان کرده و پیوستگی سیستم را از بین نبرد) کل کار انجام شده توسط کلیه نیروها صفر خواهد بود.

طبق این اصل صفر بودن کار انجام شده در طی یک تغییر مکان مجازی کوچک عبارت معادلی برای بیان تعادل است.

بنابراین در یک سیستم دینامیکی برای بدست آوردن معادلات حرکت می توان:

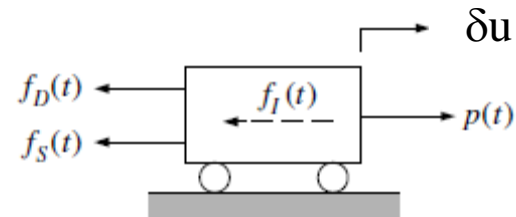
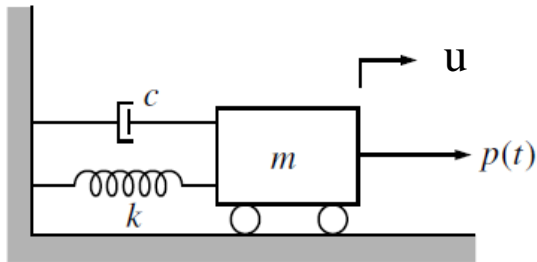
i. ابتدا تمامی نیروهای وارده بر جرم‌های سیستم را که شامل نیروهای اینرسی تعریف شده بر طبق دالامبر نیز می باشند تعیین کرد، و

ii. سپس در هر درجه آزادی سیستم تغییرمکان مجازی مناسبی معرفی کرد،

iii. و درنهایت با محاسبه کار کل و مساوی صفر قرار دادن آن، معادلات حرکت را بدست آورد.

از مزیت های عمده این روش اسکالر بودن جملات کار مجازی است که می توان آنها را بطور جبری جمع کرد، در حالیکه نیروهای وارده بر سازه برداری بوده و فقط به شکل برداری جمع می شوند.





مثال :

به جرم  $m$  تغییر مکان مجازی  $\delta u$  داده می شود. کل کار نیروهای مؤثر به جرم  $m$  محاسبه و

مساوی صفر قرار داده می شود:

$$-f_I(t)\delta u - f_D(t)\delta u - f_S(t)\delta u + p(t)\delta u = 0$$

$$[-f_I(t) - f_D(t) - f_S(t) + p(t)]\delta u = 0$$

چون  $\delta u$  تغییرمکان کوچک اختیاری غیر صفر است پس عبارت داخل کروشه مساوی صفر است

در نتیجه :

$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

روش دیگر برای پرهیز از معادلات برداری تعادل در استخراج معادلات حرکت، استفاده از اصل هامیلتون است که در آن از تغییرات انرژی استفاده می شود.

## بیان اصل هامیلتون :

تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل به اضافه تغییرات کار انجام یافته توسط نیروهای غیرپایستار بایستی در طی هر فاصله زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر صفر باشد.

اصل هامیلتون معمولاً بصورت عبارت ریاضی زیر نوشته می شود :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

که در آن:

$T$ : انرژی جنبشی کل سیستم

$V$ : انرژی پتانسیل سیستم، شامل انرژی کرنشی (strain energy) و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی پایستار (نیروهای ثابت با زمان)

$W_{nc}$ : کار انجام یافته توسط نیروهای غیرپایستار اعمال شده بر سیستم، شامل نیروهای میرایی و هر نیروی خارجی دلخواه

$\delta$ : تغییرات در طول فاصله زمانی نشان داده شده

با استفاده از اصل هامیلتون ، معادلات حرکت هر سیستم مستقیماً به دست می آیند.

فرق این روش با روش کار مجازی آن است که نیروهای اینرسی و الاستیک مستقیماً در معادلات داخل نمی‌شوند و بجای آنها بترتیب از تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل استفاده می‌گردد.

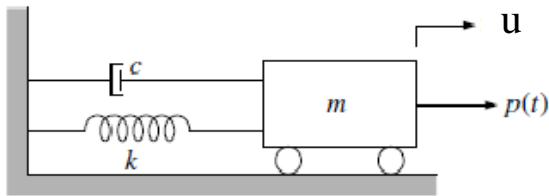
به این ترتیب این روش دارای مزیت استفاده از مقادیر انرژی اسکالر می‌باشد، درحالیکه نیروها و تغییرمکان‌هایی که برای نشان دادن اثرات متناظر آنها در روش کار مجازی بکار می‌روند، علیرغم جملات کار که اسکالر می‌باشند، همگی برداری هستند.

قابل توجه است که اصل هامیلتون را می‌توان برای مسائل استاتیکی نیز بکار برد. در این حالت، جمله مربوط به انرژی جنبشی  $T$  صفر گردیده و دیگر جملات باقیمانده در انتگرال نسبت به زمان نامتغیر هستند، بنابراین معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$\delta(V - W_{nc}) = 0$$

که همان اصل مشهور انرژی پتانسیل مینیمم بوده که کاربرد وسیعی در تحلیل استاتیکی دارد.

(  $W_{nc}$  کار مربوط به نیروهایی است که متغیرند و انرژی‌شان زایل می‌شود(مثلا صرف حرارت می‌شود) )



اصل هامیلتون

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

انرژی جنبشی سیستم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$$

انرژی پتانسیل سیستم (انرژی کرنشی فنر)

$$V = \frac{1}{2} k u^2$$

نیروهای غیر پایستار سیستم نیروی میرایی  $f_D$  و نیروی خارجی  $p(t)$  هستند:

$$\delta w_{nc} = p(t) \delta u - c \dot{u} \delta u$$

( از سازه انرژی می گیرد ) ( به سازه انرژی می دهد )

با جایگذاری سه رابطه فوق در اصل هامیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} [p(t) \delta u - c \dot{u} \delta u] dt = 0$$

با محاسبه تغییرات اولین جمله و مرتب کردن جملات خواهیم داشت :

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{u}\delta\dot{u} - c\dot{u}\delta u - ku\delta u + p(t)\delta u)dt = 0$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از جمله اول آن را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\delta\dot{u}dt = m\dot{u}\delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{u}\delta udt$$

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

$$U = m\dot{u} \rightarrow dU = m\ddot{u}dt$$

$$dV = \delta\dot{u}dt \rightarrow dV = \delta\left(\frac{du}{dt}\right)dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta u) \rightarrow V = \delta u$$

چون در اصل هامیلتون فرض بر این است که تغییرات  $\delta u$  در حدود انتگرال گیری  $t_1$  و  $t_2$  حذف می گردد اولین جمله سمت راست معادله اخیر صفر می شود بنابراین با جایگزینی معادله اخیر در معادله قبلی نتیجه می شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + p(t)]\delta u dt = 0$$

و چون تغییرات  $\delta u$  اختیاری است واضح است معادله فوق در حالت کلی فقط وقتی ارضا خواهد شد که عبارت داخل کروشه مساوی صفر باشد یعنی:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

## فصل دوم

# واکنش ارتعاش آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی



انحراف سازه از وضعیت تعادل استاتیکی در اثر اعمال تغییر مکان اولیه یا سرعت اولیه، بدون اینکه تحریک خارجی دیگری به سازه اعمال شود منجر به ارتعاش آزاد سازه می شود.

در فصل قبل نشان داده شد که معادله حرکت هر سیستم یک درجه آزادی را می توان به شکل

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad \text{کلی زیر نوشت :}$$

برای تعیین واکنش سیستم تحت اثر نیروی محرک  $p(t)$  با شرایط اولیه مشخص، باید معادله فوق را حل نمود. معمولاً، سرعت و تغییر مکان در لحظه  $t = 0$  را بعنوان شرایط اولیه انتخاب می نمایند  
( $\dot{u}(0)$ ,  $u(0)$ )

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت است. جواب این معادله از مجموع دو

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

جواب ذیل حاصل می شود :

- i. جواب عمومی  $u_c(t)$  : که از نظر فیزیکی معادل ارتعاش آزاد سیستم می باشد.
- ii. جواب خصوصی  $u_p(t)$  : که از نظر فیزیکی معادل ارتعاش اجباری سیستم است و ناشی از نیروی محرک می باشد.

در این فصل معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی صرفاً در حالتی که  $p(t) = 0$  باشد (حالت ارتعاش آزاد) مورد بررسی قرار می گیرد یعنی:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2)$$

برای این معادله جوابی بصورت زیر فرض می شود:

$$u(t) = Ge^{st} \quad (3)$$

و با جایگزین کردن آن در رابطه (2):

$$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0 \quad (4)$$

با توجه به اینکه معادله (۴) به ازای تمام مقادیر  $t$  صادق است پس از تقسیم کردن بر  $mGe^{st}$  و استفاده از تعریف زیر:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (۵)$$

معادله به شکل زیر در می آید :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (۶)$$

معادله فوق، **معادله مشخصه سیستم** نامیده می شود، جوابی که از این معادله می توان برای  $s$  بدست آورد بستگی به مقدار  $c$  دارد، لذا انواع حرکتی که توسط معادله (۶) بیان می شود بستگی به میرایی سیستم دارد.

انواع سیستم های ارتعاش آزاد:

1. بدون میرایی
2. با میرایی:
  - i. زیر بحرانی
  - ii. بحرانی
  - iii. فوق بحرانی

# Damped Free Vibration

# انواع ارتعاش آزاد میرا شونده

5

$$p(t) = 0$$

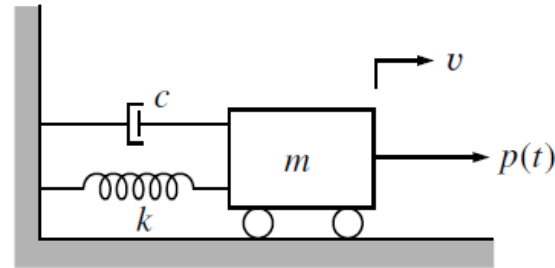
$$c \neq 0$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \neq 0$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \rightarrow \ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

$$u = Ge^{st}$$

معادله مشخصه سیستم  $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$



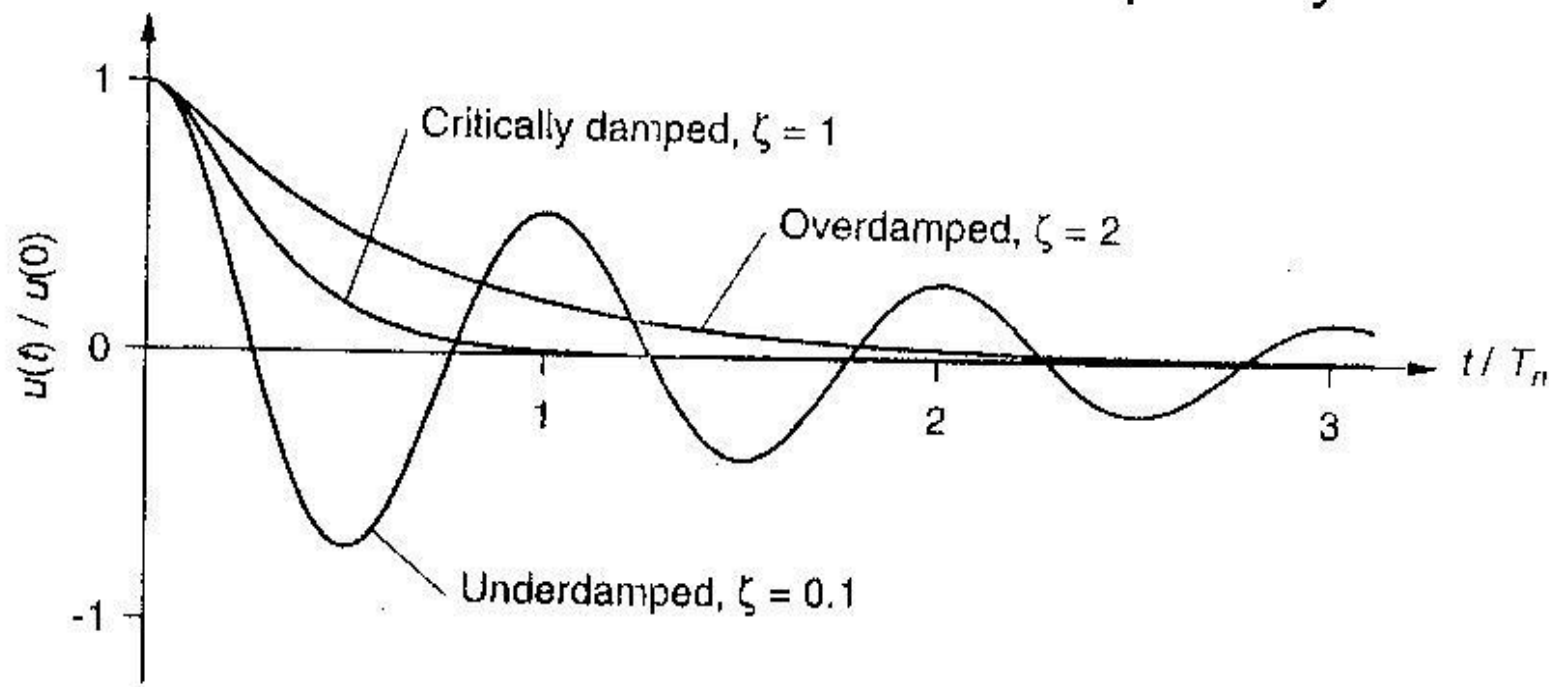
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if : } \xi = 1 \rightarrow s_{1,2} = -\xi\omega = -\omega \\ \text{if : } \xi < 1 \rightarrow s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2} \\ \text{if : } \xi > 1 \rightarrow s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \end{array} \right.$$

Critically damped میرایی بحرانی

Under damped میرایی زیر بحرانی

Over damped میرایی فوق بحرانی

Free vibration of underdamped, critically-damped, and overdamped systems



## ارتعاش آزاد غیر مستهلک شونده (بدون میرایی)

### Undamped Free Vibration

7

اگر  $c=0$  باشد، معادله مشخصه (۶) بصورت زیر خواهد بود:

$$s^2 + \omega^2 = 0$$

جواب  $s$  عبارت خواهد بود :

$$s_{1,2} = \pm i\omega$$

با قرار دادن ریشه های فوق در رابطه (۳) جواب عمومی زیر را خواهیم داشت:

$$u(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

با استفاده از رابطه اولر، معادله فوق را به شکل ساده تر زیر می توان نوشت:

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

# ارتعاش آزاد غیر مستهلک شونده (بدون میرایی)

## Undamped Free Vibration

8

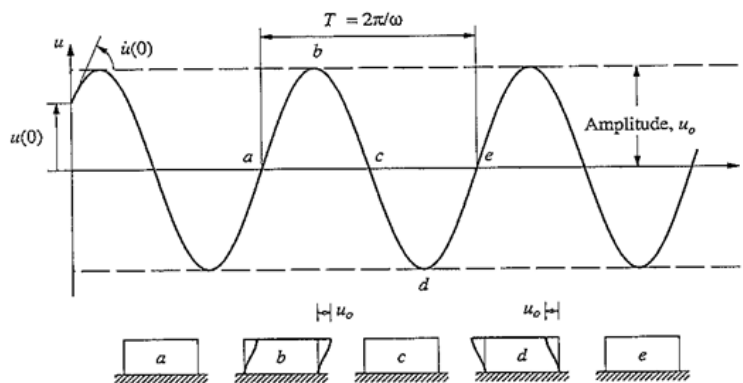
ضرایب  $A$  و  $B$  با استفاده از شرایط اولیه بدست می آیند. با معلوم بودن مقادیر تغییرمکان و سرعت در آغاز حرکت یعنی  $u(0)$  و  $\dot{u}(0)$  این ضرایب بسادگی تعیین می شوند:

$$u(0) = B \quad \dot{u}(0) = A\omega$$

و لذا داریم:

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t$$

رابطه فوق ، معادله ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزاد غیر مستهلک شونده است که نشانگر یک حرکت هارمونیکی ساده است که در شکل زیر رسم شده است.



Free vibration of a system without damping.

# ارتعاش آزاد غیر مستهلک شونده (بدون میرایی)

## Undamped Free Vibration

9

همانطور که در شکل دیده می شود دامنه ارتعاش در طی زمان کاهش نمی یابد چون انرژی در سیستم میرا نمی شود.

- $\omega$  فرکانس دورانی (طبیعی) یا سرعت زاویه ای حرکت می باشد که بر حسب رادیان بر واحد زمان بیان می شود

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

- فرکانس  $f$  نیز از رابطه زیر بدست می آید:

(۱۱)

فرکانس عبارت است از تعداد دوره های تناوب در زمان ۱ ثانیه و واحد آن هرتز Hz می باشد.

- معکوس فرکانس که دوره تناوب  $T$  می باشد (زمان لازم برای یک دور نوسان کامل)، از رابطه زیر بدست می آید

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

(۱۲)



# ارتعاش آزاد غیر مستهلک شونده (بدون میرایی)

## Undamped Free Vibration

10

■ معادله ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی (رابطه ۱۱)، را می توان به صورت یک جمله کسینوسی نیز نوشت:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (14)$$

در این رابطه  $\rho$  (Amplitude) دامنه حرکت، برابر است با:

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2} \quad (15)$$

و زاویه فاز  $\theta$  (Phase Angle) برابر است با:

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)} \right] \quad (16)$$

# ارتعاش آزاد مستهلک شونده (دارای میرایی)

## Damped Free Vibration

11

هرگاه سیستم دارای میرایی باشد، جواب معادله مشخصه (۶) که مشخص کننده واکنش سیستم است، به صورت زیر خواهد بود:

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \quad , \quad c \neq 0 \quad (۶\text{-تکراری})$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

برحسب اینکه مقدار زیر رادیکال مثبت، منفی یا صفر باشد، سه نوع حرکت قابل تصور است. بخاطر سهولت کار، ابتدا حالت حدی یعنی وقتی که زیر رادیکال صفر باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این حالت را **میرایی بحرانی (Critical damping)** می‌نامند.

هرگاه زیر رادیکال در معادله مشخصه برابر با صفر گردد، بدیهی است که:  
لذا مقدار میرایی بحرانی برابر است با:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = 1$$

$$c_{cr} = 2m\omega$$

و مقدار (s) در معادله مشخصه برابر خواهد بود با:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} = -\omega$$

واکنش بدست آمده از معادله (۳) بعلت وجود ریشه های مضاعف  $s_1 = s_2 = -\omega$  برای معادله مشخصه، بصورت زیر می باشد:

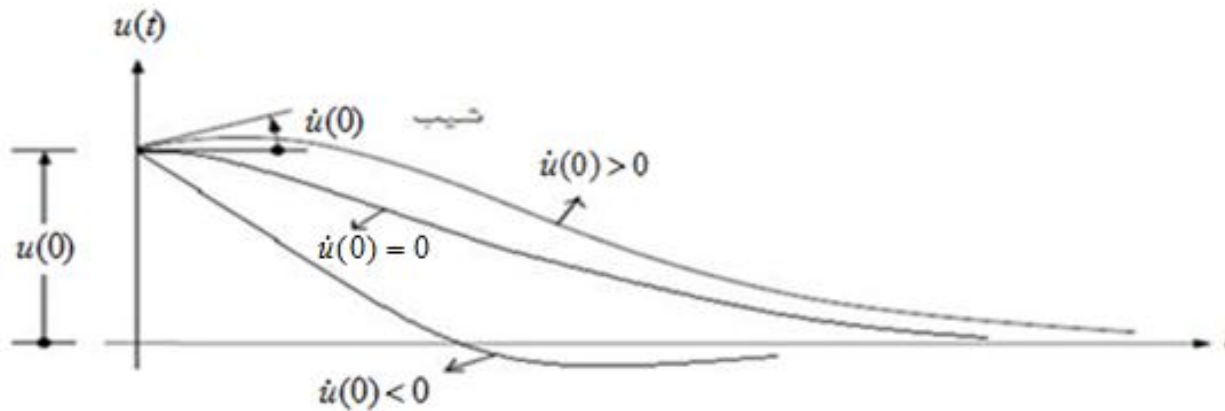
$$u(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t}$$

با اعمال شرایط اولیه در معادله فوق، شکل نهایی معادله واکنش ارتعاش آزاد حالت میرایی بحرانی بدست می آید:

$$t = 0 \begin{cases} u = u(0) \\ \dot{u} = \dot{u}(0) \end{cases}$$

$$u(t) = [u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t] e^{-\omega t}$$

واکنش ارتعاش آزاد در حالت میرایی بحرانی در شکل زیر نشان داده شده است



قابل توجه است که واکنش ارتعاش آزاد یک سیستم با میرایی بحرانی، به صورت نوسان حول محور تغییر مکان، صفر نمی باشد. بلکه مطابق با جزء توانی معادله اخیر، تغییر مکان به سمت صفر میل می کند.

میرایی بحرانی، کمترین مقدار میرایی است که به ازای آن، هیچ نوسانی در واکنش ارتعاش آزاد سیستم بوجود نمی آید. به عبارت دیگر میرایی بحرانی عبارت است از، کمترین مقدار میرایی لازم برای حذف نوسانات در پاسخ ارتعاش آزاد سازه.

□ اگر چه در شرایط عادی، با سیستم های سازه ای که دارای میرایی بیش از میرایی بحرانی باشند مواجه نمی شویم لیکن بررسی این حالت برای تکمیل این مبحث مفید است.

□ در این حالت  $\xi > 1$  بوده و ریشه های معادله مشخصه سیستم را می توان بشکل زیر نوشت (در این حالت

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm \hat{\omega} \quad \hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \text{ (زیر رادیکال بزرگتر از صفر است)}$$

$$u(t) = G_1 e^{s_1 t} + G_2 e^{s_2 t}$$

$$u(t) = G_1 e^{(-\xi\omega + \hat{\omega})t} + G_2 e^{(-\xi\omega - \hat{\omega})t}$$

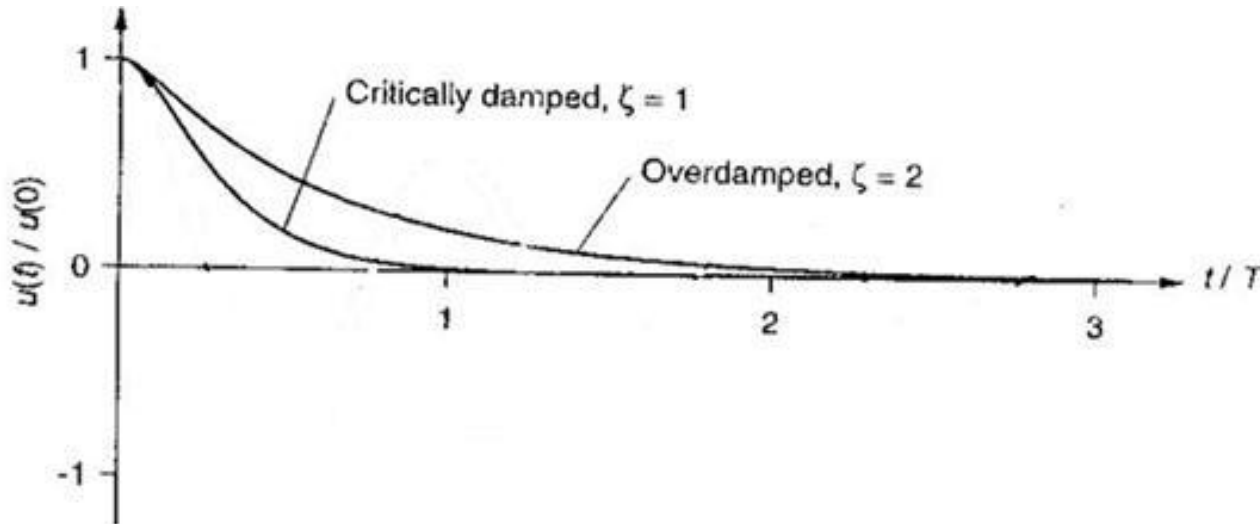
$$u(t) = (G_1 e^{\hat{\omega}t} + G_2 e^{-\hat{\omega}t}) e^{-\xi\omega t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sinh \hat{\omega}t + B \cosh \hat{\omega}t)$$

$$u(t) = \left[ u(0) \cosh \hat{\omega}t + \left( \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\hat{\omega}} \right) \sinh \hat{\omega}t \right] e^{-\xi\omega t}$$

□ در رابطه فوق ضرایب A و B با استفاده از شرایط اولیه، تعیین شده اند.

□ واکنش یک سیستم با میرایی فوق بحرانی، بصورت نوسانی نبوده بلکه شبیه حرکت یک سیستم با میرایی بحرانی است با این فرق که به علت افزایش نسبت میرایی، سیستم با سرعت کمتری به حالت خنثی بر می گردد.



□ البته لازم به ذکر است که سیستم های میراشونده فوق بحرانی در سازه های مهندسی عمران متداول نمی باشد.

در این حالت مقدار میرایی کمتر از میرایی بحرانی می باشد

$$c < c_{cr} = 2m\omega$$

و لذا مقدار زیر رادیکال در معادله مشخصه سیستم، منفی می شود.

به منظور بررسی واکنش ارتعاش آزاد در این حالت، بهتر است که مقدار میرایی به صورت ضربی از

میرایی بحرانی بیان شود، به این ترتیب که :

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$$

که  $\xi$  را نسبت میرایی می نامند. (و اگر به صورت درصد بیان شود، درصد میرایی می نامند.) با

بکارگیری معادله فوق در جواب معادله مشخصه سیستم، داریم :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2}$$

با عوض کردن علامت رادیکال و همچنین معرفی پارامتر جدید  $\omega_D$  خواهیم داشت :

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (23)$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (24)$$

$\omega_D$  را فرکانس ارتعاش میرا شونده (DAMPED VIBRATION FREQUENCY) می نامند.

با توجه به نسبت های میرایی که در سیستم های سازه ای عادی با آن روبرو هستیم ( $\xi < 20\%$ )، مقدار فرکانس ارتعاش میرا شونده ( $\omega_D$ ) طبق معادله فوق اختلاف کمی با فرکانس غیر میرا ( $\omega$ ) دارد.

مقادیر نمونه نسبت میرایی در اسلاید بعدی داده شده است.



نسبت میرایی ( $\xi$ )	نوع سازه
۰.۰۲	(۱) قاب فولادی با اتصالات جوشی و دیوارهای انعطاف پذیر
۰.۰۵	(۲) قاب فولادی با اتصالات جوشی یا پیچی، پوشش سخت و تمام دیوارهای داخلی انعطاف پذیر
۰.۰۷	(۳) قاب فولادی با اتصالات برشی یا پیچی و دیوارهای برشی بتنی
۰.۰۵	(۴) قاب بتنی با دیوارهای انعطاف پذیر
۰.۰۷	(۵) قاب بتنی با پوشش سخت و تمام دیوارهای داخلی انعطاف پذیر
۰.۱۰	(۶) قاب بتنی با دیوارهای برشی بتنی یا بنایی
۰.۱۰	(۷) ساختمانهایی که فقط دیوارهای برشی بتنی و یا بنایی دارند
۰.۱۵	(۸) ساختمانهایی که دارای دیوارهای برشی چوبی هستند

**TABLE 11.2.1 RECOMMENDED DAMPING VALUES**

Stress Level	Type and Condition of Structure	Damping Ratio (%)
Working stress, no more than about $\frac{1}{2}$ yield point	Welded steel, prestressed concrete, well-reinforced concrete (only slight cracking)	2–3
	Reinforced concrete with considerable cracking	3–5
	Bolted and/or riveted steel, wood structures with nailed or bolted joints	5–7
At or just below yield point	Welded steel, prestressed concrete (without complete loss in prestress)	5–7
	Prestressed concrete with no prestress left	7–10
	Reinforced concrete	7–10
	Bolted and/or riveted steel, wood structures with bolted joints	10–15
	Wood structures with nailed joints	15–20

Source: N. M. Newmark, and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982.

واکنش ارتعاش آزاد حالت زیر بحرانی را می توان از به صورت زیر محاسبه کرد :

$$u(t) = G_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + G_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

قسمت داخل پرانتز، بیانگر حرکت هارمونیکی ساده است، لذا این معادله را به صورت ساده تر زیر نیز می توان

نوشت :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

بالاخره با اعمال شرایط اولیه  $u(0)$  و  $\dot{u}(0)$  برای محاسبه ضرایب معادله فوق، نتیجه می شود:

$$t = 0 \quad \begin{cases} u(t) = u(0) \\ \dot{u}(t) = \dot{u}(0) \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( \frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u(0) \cos \omega_D t \right)$$

معادله فوق، معادله ارتعاش آزاد سیستم در حالت زیر بحرانی است.

این معادله را می توان به صورت جمله کسینوسی زیر نیز نوشت :

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)$$

که در آن :

(AMPLITUDE)

دامنه

$$\rho = \left\{ \left[ \frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + u(0)^2 \right\}^{1/2}$$

(PHASE ANGLE)

زاویه فاز

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D u(0)}$$

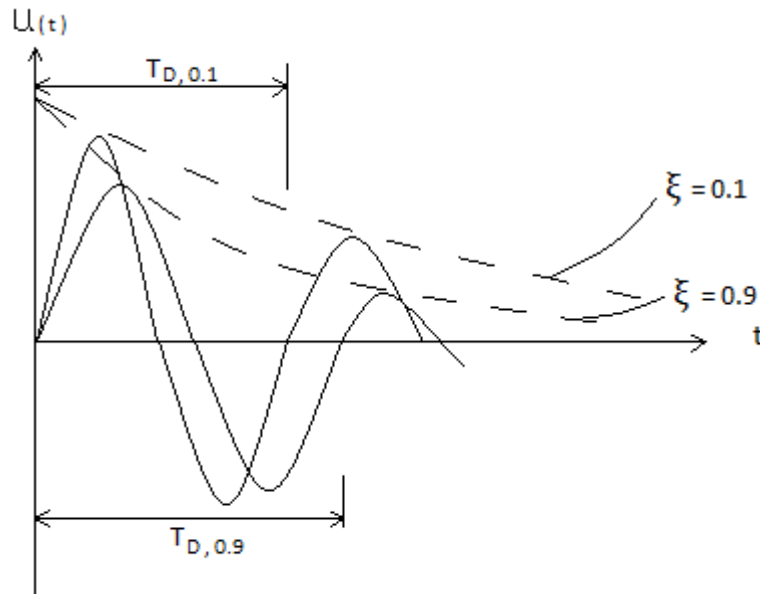
کاهش پوش :  $e^{-\xi\omega t}$

پاسخ هارمونیکی :  $\rho \cos(\omega_D t - \theta)$

# تأثیر میرایی در نرخ استهلاک ارتعاش

افزایش میرایی ← کاهش فرکانس ارتعاشی میراشونده  $\omega_D$  ← افزایش زمان تناوب  $T_D$

نرخ استهلاک با افزایش نسبت میرایی، افزایش چشمگیری دارد.



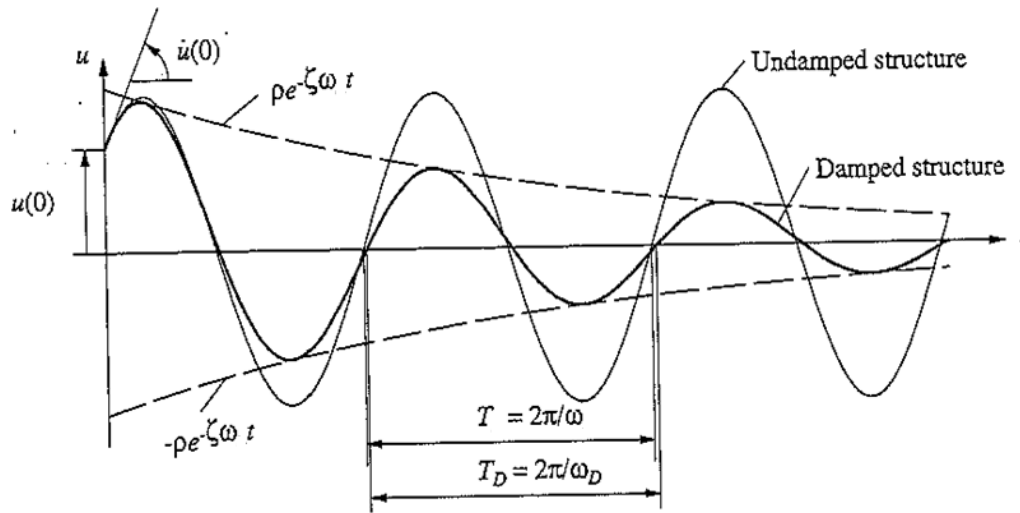
$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_{D,0.1} > \omega_{D,0.9}$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

$$T_{D,0.9} > T_{D,0.1}$$

# مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد سیستمهای میرا شونده و نامیرا

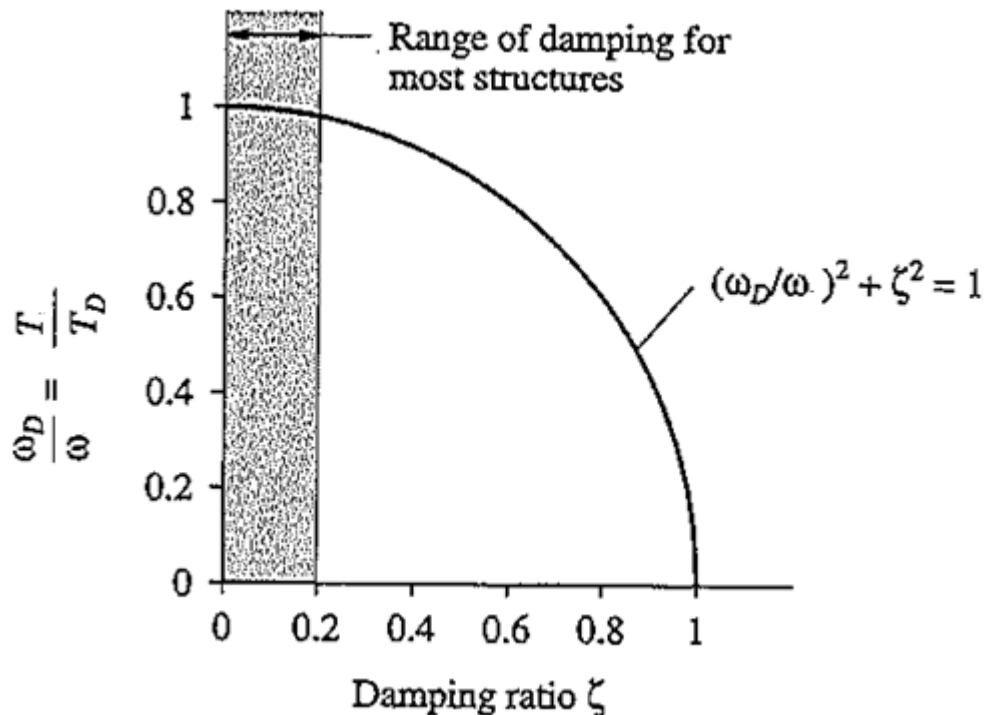


■ در ارتعاش نامیرا دامنه ارتعاش ثابت است ولی در ارتعاش میرا دامنه ارتعاش در هر دوره کوچکتر از دوره قبل است.

■ میرایی باعث کاهش فرکانس طبیعی از  $\omega$  به  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$  و افزایش زمان تناوب از  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  به  $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}}$  می شود.

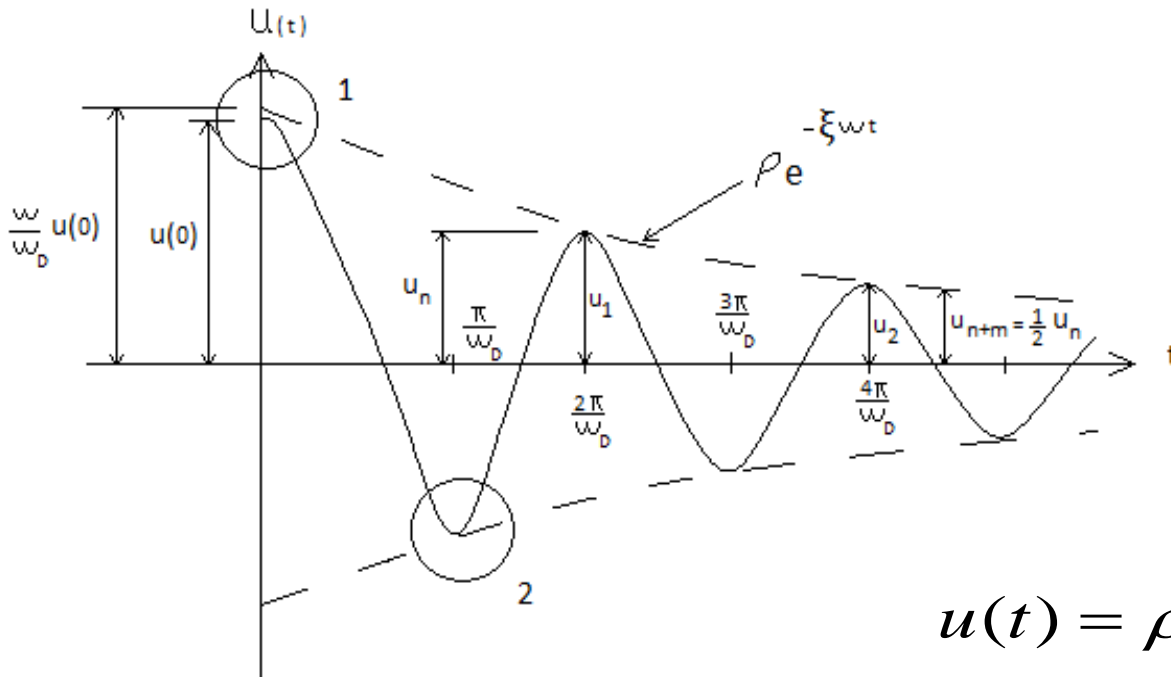
# مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد سیستمهای میرا شونده و نامیرا

- تاثیر نسبت میرایی  $\xi$  بر این تغییرات، در شکل زیر نشان داده شده است.
- میزان تاثیر نسبت میرایی برای مقادیر  $\xi < 20\%$ ، یعنی در محدوده میرایی سازه های متعارف، بسیار ناچیز است، از این رو اغلب  $T_D \cong T$ ،  $\omega_D \cong \omega$  فرض می شود.



# مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد سیستم‌های میرا شونده و نامیرا

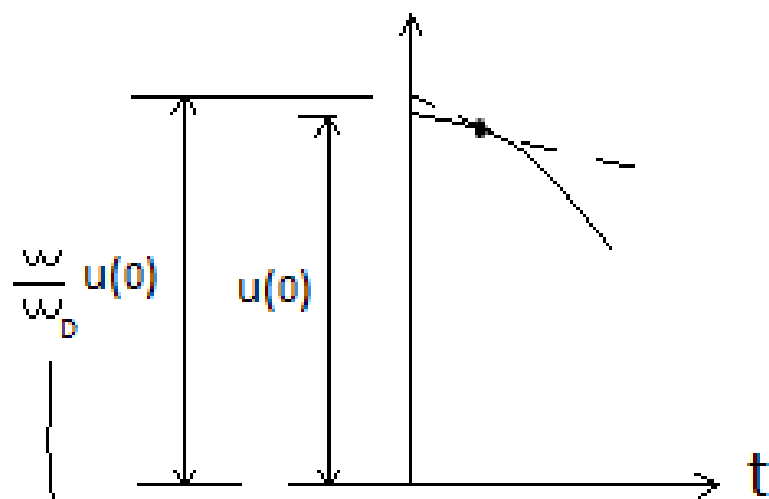
واکنش یک سیستم در حالت زیر بحرانی، در اثر یک تغییر مکان اولیه  $u(0)$  و بدون سرعت اولیه ( $\dot{u}(0)=0$ ) (بعبارت دیگر رها کردن جرم از حالت سکون با یک تغییر مکان اولیه) در شکل زیر نشان داده شده است. ملاحظه می شود که این سیستم، با فرکانس ثابت دورانی  $\omega_D$ ، حول محور تغییر مکان صفر، نوسان می کند.



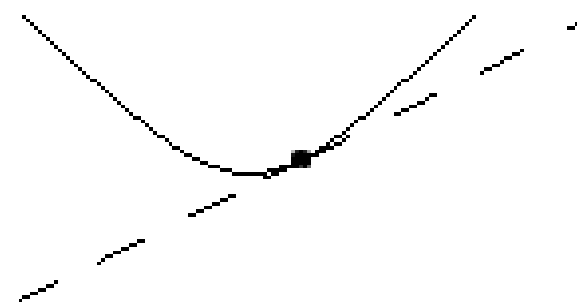
$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)$$



# مقایسه پاسخ ارتعاش آزاد سیستمهای میرا شونده و نامیرا



( Detail 1 )



( Detail 2 )

منحنی پوش بر نمودار تغییر مکان - زمان  
به فاصله کوچکی از نقطه حداقل (حداکثر)  
مماس است.

$$e^{-\xi \omega t}$$
 برابر است با مقدار  
 به ازای  $t = 0$   

$$\dot{u}(0) = 0$$

## روش های تعیین نسبت میرایی (ξ)

- مشخصات میرایی واقعی در سیستم های سازه ای عادی بسیار پیچیده است و تعیین آن مشکل می باشد.
- بطور متداول میرایی سازه های واقعی را بر حسب نسبتهای میرایی ویسکوز معادل ξ بیان می کنند که بیانگر شدت میرایی نظیر شرایط ارتعاش آزاد است.
- با استفاده از نمودار ثبت شده حرکت ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی، به دو روش می توان نسبت میرایی ξ را تعیین نمود :

(۱) روش کاهش لگاریتمی      (۲) روش نیم دامنه

که هر دو روش بر اساس رابطه ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی با میرایی زیر بحرانی استوار

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(w_D t - \theta) \quad \text{می باشند.}$$

دو اوج متوالی مثبت از منحنی تغییرمکان ارتعاش آزاد را در نظر بگیرید، که مقادیر متناظر  $u_n$  و  $u_{n+1}$  نامیده شده است. نسبت این دو مقدار متوالی برابر است با:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{\rho e^{-\xi\omega(t+2\pi/\omega_D)} \cos(\omega_D(t + 2\pi/\omega_D) - \theta)} = \exp\left(2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right)$$

از طرفین معادله فوق لگاریتم طبیعی می گیریم، کاهش لگاریتمی  $\delta$  بدست می آید:

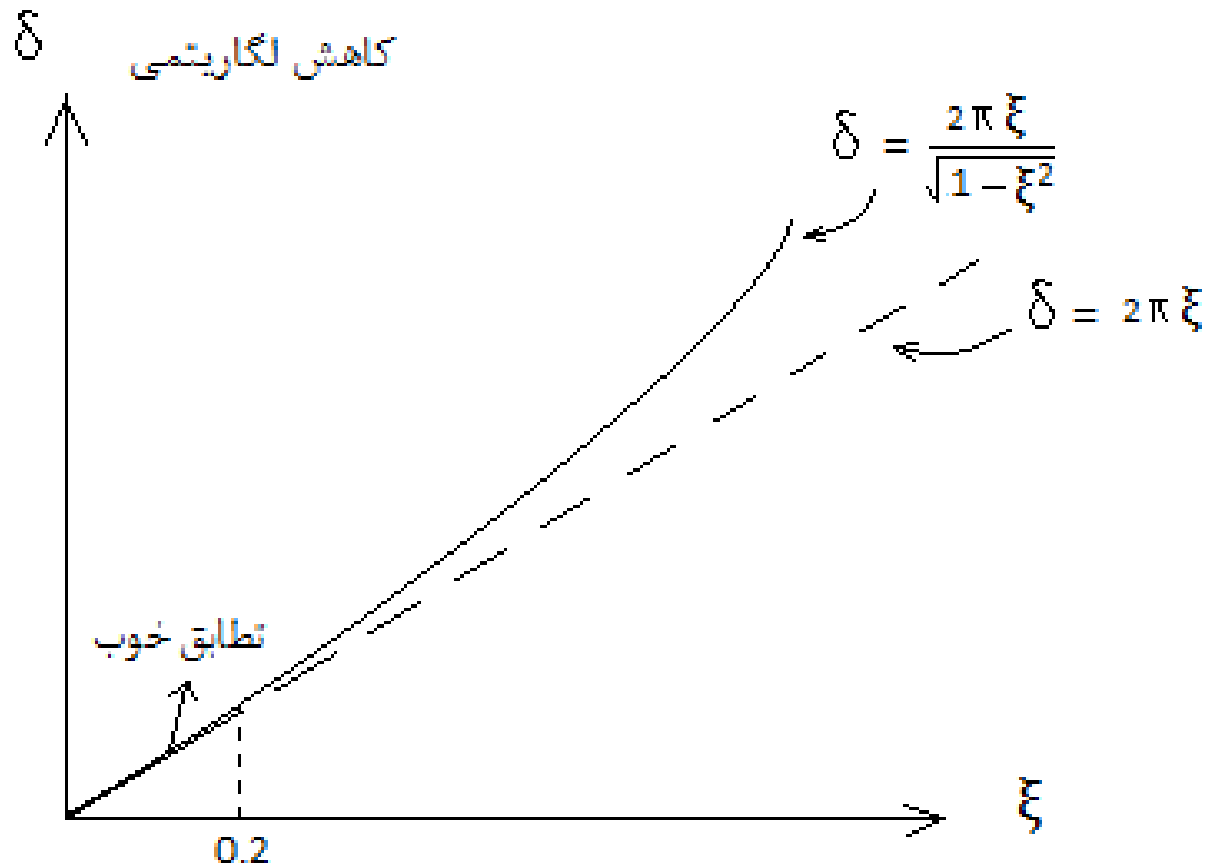
$$\delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}$$

با استفاده از معادله فرکانس میرا شونده نتیجه می شود:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

وقتی که  $\xi$  کوچک باشد ( $\xi < 0.2$ )،  $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$  و در نتیجه:

$$\text{If : } \xi < 0.2 \rightarrow \delta \cong 2\pi\xi \rightarrow \boxed{\xi \cong \delta / 2\pi}$$



با استفاده از بسط سری تیلور، معادله اول را می توان به صورت زیر نوشت :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \cong \exp(2\pi\xi) = e^\delta = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots$$

برای مقادیر کوچک  $\xi$ ، با تقریب خوبی می توان بسط سری فوق را به دو جمله اول آن محدود کرد، که در این صورت:

$$\xi \cong \frac{u_n - u_{n+1}}{2\pi u_{n+1}}$$

در سیستم هایی که مقدار استهلاک (میرایی) آنها بسیار کم باشد، می توان با اختیار کردن اوج هایی از منحنی واکنش که

چندین سیکل از هم فاصله داشته باشند مثلا  $m$  سیکل، میزان دقت در محاسبه نسبت میرایی را افزایش داد؛ بنابراین :

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+m}} = 2m\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = e^{2m\pi\xi} = 1 + 2m\pi\xi$$

که آنرا می توان به صورت ساده تر زیر نوشت :

$$\xi = \frac{u_n - u_{n+m}}{2m\pi u_{n+m}}$$

این روش نیز بر اساس دامنه منحنی پوش حرکت استوار است.

دو نقطه اوج را روی منحنی طوری انتخاب می کنیم که:

$$u_{n+m} = \frac{1}{2} u_n$$

اگر این دو نقطه به اندازه  $m$  دوره تناوب از یکدیگر فاصله زمانی داشته باشند می توان نوشت:

$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = e^{2m\pi\xi}$$

از طرفین معادله فوق لگاریتم طبیعی می گیریم:

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+m}} = 2m\pi\xi \rightarrow \ln 2 = 2m\pi\xi \rightarrow \xi = \frac{\ln 2}{2m\pi}$$

$$\xi = \frac{0.11}{m}$$

پس:

- انرژی داده شده به یک سیستم یک درجه آزادی (انرژی ورودی input energy) به ازای اعمال تغییر مکان اولیه  $u(0)$  و سرعت اولیه  $\dot{u}(0)$  برابر است با:

$$E_1 = \frac{1}{2} k [u(0)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{u}(0)]^2$$

- در هر لحظه دلخواه  $t$  از ارتعاش، انرژی کل سیستم شامل انرژی جنبشی  $E_K$  جرم و انرژی پتانسیل  $E_S$  (که مساوی انرژی کرنشی سازه تغییر شکل یافته است) می باشد:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m [\dot{u}(t)]^2$$

$$E_s(t) = \frac{1}{2} k [u(t)]^2$$

## الف - برای سیستم بدون میرایی

33

$$u(t) = u(0)\cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t \rightarrow \dot{u}(t) = \omega \left[ -u(0)\sin \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \cos \omega t \right]$$

$$E_s = \frac{1}{2} k [u(t)]^2 \qquad E_s(t) = \frac{1}{2} k \left[ u(0)\cos \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t \right]^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m [\dot{u}(t)]^2 \qquad E_k(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[ -u(0)\sin \omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \cos \omega t \right]^2$$

انرژی کل برابر خواهد بود با:

$$E_k(t) + E_s(t) = \frac{1}{2} k [u(0)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{u}(0)]^2$$

قابل ملاحظه است که انرژی کل مستقل از زمان بوده و همواره مساوی انرژی ورودی است (اصل بقای انرژی در سیستم نامیرای در حال ارتعاش).



## ب- برای سیستم با میرایی

34

طبق روال فوق، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم را می توان با جایگذاری  $u(t)$  از رابطه زیر در روابط فوق محاسبه کرد.

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

$$A = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0)}{\omega_D} \quad B = u(0)$$

به علت استهلاک انرژی ناشی از میرایی، انرژی کل ( $E_t$ ) به صورت تابعی از زمان کاهش خواهد یافت. مقدار کاهش انرژی به علت میرایی در فاصله زمانی 0 تا  $t$  برابر است با:

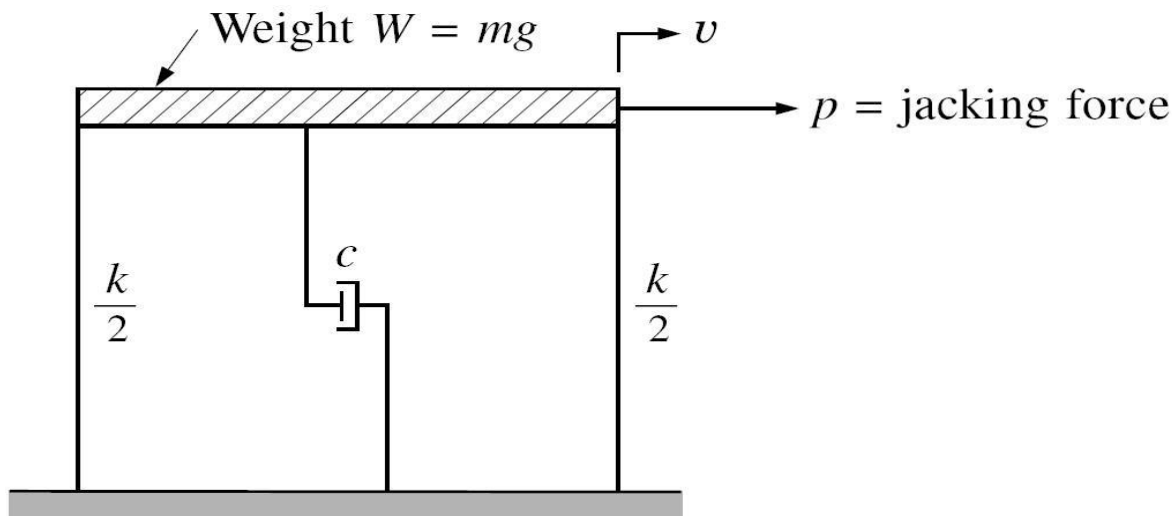
$$E_D = \int_0^u f_D(t) du = \int_0^u c \dot{u} du = \int_0^t c \dot{u}^2 dt$$

با میل کردن  $t$  به سمت بینهایت، انرژی مستهلک شده طبق رابطه فوق مساوی انرژی ورودی شده و انرژی باقیمانده صفر می شود.

## ب- برای سیستم با میرایی

35

**مثال:** ساختمان یک طبقه ای به صورت تیر صلب با ستون های بدون وزن مطابق شکل مقابل مدل شده است، برای ارزیابی واکنش دینامیکی این سازه ، یک آزمایش ارتعاش آزاد بر روی آن انجام شده است، بدین ترتیب که سقف این سیستم (تیر صلب)، به کمک یک جک هیدرولیکی، بطور جانبی تغییر مکان یافته و سپس رها شده است، در هنگام جک زدن مشاهده شد که نیرویی به مقدار  $20\text{kips}$  برای ایجاد تغییر مکانی به مقدار  $0.20$  اینچ لازم است. پس از رها کردن سیستم با این تغییر مکان اولیه، مقدار حداکثر تغییر مکان آن در برگشت بعدی برابر  $0.16$  اینچ و دوره تناوب آن در طی این سیکل برابر  $1.40$  sec می باشد. بر اساس اطلاعات فوق، پارامترهای دینامیکی زیر محاسبه شده است:



## ب- برای سیستم با میرایی

36

(1) محاسبه وزن مؤثر تیر

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gk}} = 1.40$$

لذا:

$$W = \left(\frac{1.40}{2\pi}\right)^2 gk = (0.0496)(386)\left(\frac{20}{0.2}\right) = 1.920 \text{ kips}$$

(2) فرکانس طبیعی نامیرا

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.40} = 0.714 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 4.48 \text{ rad / sec}$$

## ب- برای سیستم با میرایی

37

۳) مشخصه های میرایی:

$$\delta = \ln \frac{0.20}{0.16} = 0.223$$

کاهش لگاریتمی:

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = 3.55\%$$

نسبت میرایی:

ضریب میرایی:

$$c = \xi c_c = \xi 2m\omega = 0.0355 \frac{2(1.920)}{386} 4.48 = 1.584 \text{ kips.sec/in}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega (0.999)^{1/2} = \omega$$

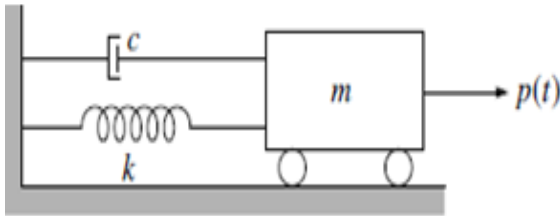
فرکانس میرا شونده:

# فصل سوم

## ارتعاش اجباری

قسمت اول: بارگذاری هارمونیکی

■ معادله حرکت یک سیستم یک درجه آزادی به شکل کلی زیر بدست آورد:



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad O.D.E$$

■ جواب این معادله دیفرانسیل معمولی از دو بخش تشکیل می شود:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

➤ که در آن  $u_c(t)$  جواب عمومی (complementary solution) از نظر فیزیکی نظیر ارتعاش آزاد سیستم است که از حل معادله زیر بدست می آید:

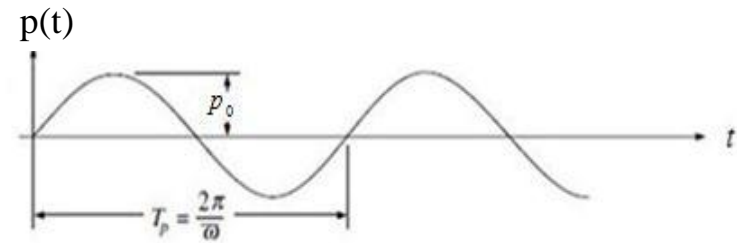
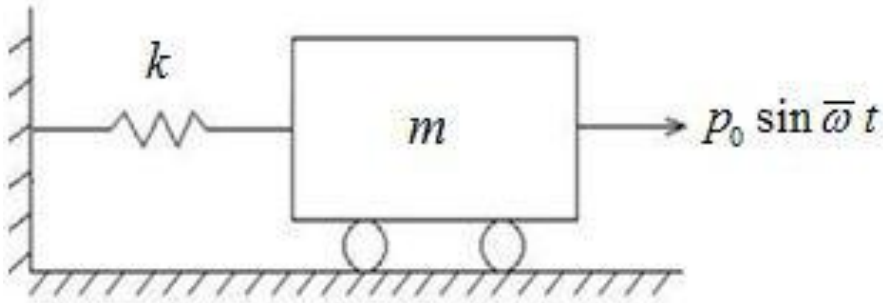
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

➤  $u_p(t)$  جواب خصوصی (complementary solution) نظیر ارتعاش اجباری تحت بار وارده بوده و با حل معادله دیفرانسیلی حرکت با در نظر گیری طرف ثانی آن بدست می آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

# پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

3



$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

■ جواب عمومی با توجه به مطالب بخش قبل عبارت است از:

$$u_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

■ جواب خصوصی با توجه به شکل هارمونیکی تابع بار به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t$$

# پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

4

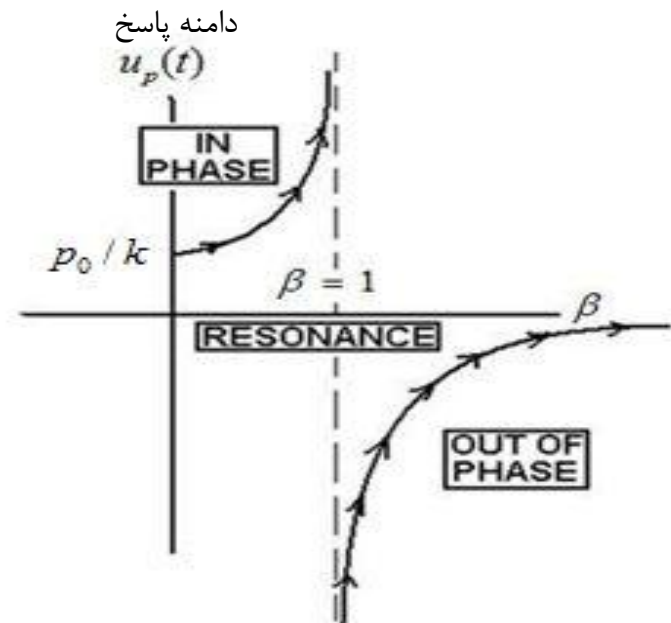
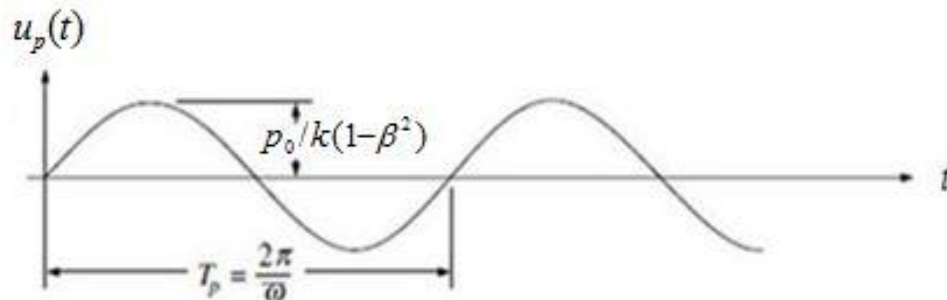
$$\dot{u}_p(t) = \bar{\omega}(G_1 \cos \bar{\omega}t - G_2 \sin \bar{\omega}t)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\bar{\omega}^2(G_1 \sin \bar{\omega}t + G_2 \cos \bar{\omega}t) = -\bar{\omega}^2 u_p(t)$$

$$m\ddot{u}_p + ku_p = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

$$(-m\bar{\omega}^2 + k)u_p = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

$$u_p(t) = \frac{p_0 \sin \bar{\omega}t}{k(1 - \beta^2)} \quad ; \quad \text{نسبت فرکانس} \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$





## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

5

در رابطه اخیر:

$$\frac{p_0}{k} = u_{st} = \text{تغییر مکان استاتیکی}$$

$$\frac{1}{1-\beta^2} = \text{ضریب بزرگنمایی دینامیکی (magnification factor)}$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی بیانگر اثر تشدید دینامیکی بارگذاری هارمونیک نسبت به بارگذاری استاتیکی است.

$$\frac{u(t)}{u_{st}} = R(t) = \text{نسبت واکنش (Response Ratio)}$$

## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

6

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0 \sin \bar{\omega} t}{k(1 - \beta^2)}$$

■ اعمال شرایط اولیه برای تعیین ضرایب ثابت A و B:

$$t = 0 ; u(0) = A \times 0 + B \times 1 + 0 \rightarrow B = u(0)$$

$$\dot{u}(0) = A \omega \times 1 - B \omega \times 0 + \frac{p_0 \bar{\omega}}{k(1 - \beta^2)} \times 1 \rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\omega} \dot{u}(0) - \frac{p_0 \bar{\omega}}{\omega k(1 - \beta^2)} = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} - \frac{p_0 \beta}{k(1 - \beta^2)}$$

# پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

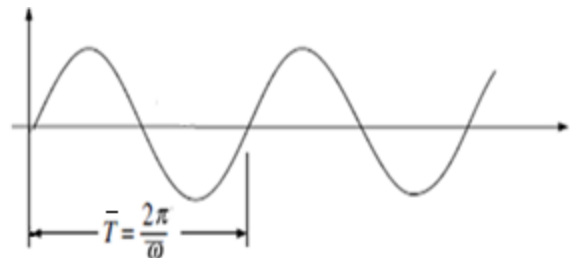
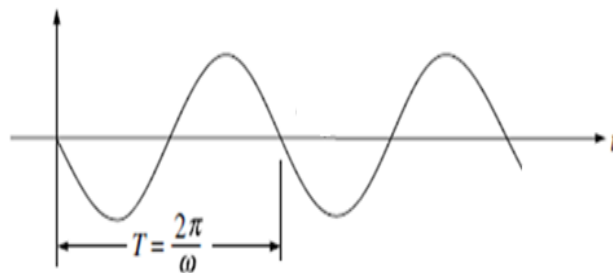
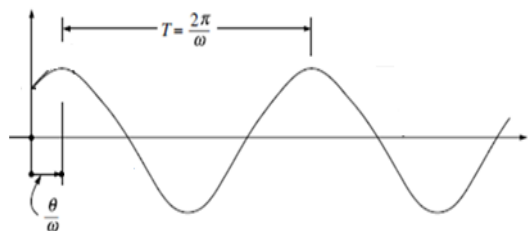
7

$$u(t) = \left[ u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \right] + \left[ \frac{-p_0 \beta}{k(1-\beta^2)} \sin \omega t \right] + \left[ \frac{p_0}{k(1-\beta^2)} \sin \bar{\omega} t \right]$$

پاسخ گذرا (وابسته به شرایط اولیه)

پاسخ گذرا (وابسته به بار)

پاسخ پایا (وابسته به بار)



## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت بدون میرایی

■ اگر شرایط اولیه مساله به صورت شروع از حالت سکون باشد یعنی:

$$u(0) = 0 ; \dot{u}(0) = 0$$

$$u(t) = [0 \sin \omega t + 0 \cos \omega t] + \left[ -\frac{p_0 \beta}{k(1-\beta^2)} \sin \omega t \right] + \left[ \frac{p_0}{k(1-\beta^2)} \sin \bar{\omega} t \right]$$

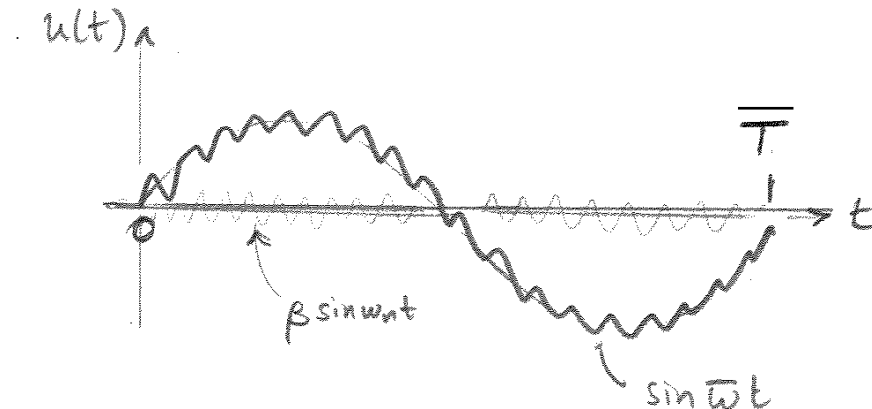
$$u(t) = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)} [\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t]$$

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} = \frac{1}{(1-\beta^2)} [\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t]$$

## حالت خاص (۱) $\bar{\omega} \ll \omega$

حالتی که فرکانس بار بسیار کمتر از فرکانس سازه باشد

$$\bar{\omega} \ll \omega \Rightarrow \beta \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\beta^2} \rightarrow 1 \Rightarrow R(t) \cong 1(\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t)$$



در این حالت دامنه تغییر شکل ارتعاشی تقریباً مساوی تغییر شکل استاتیکی است.

## حالت خاص ۲) $\bar{\omega} \gg \omega$

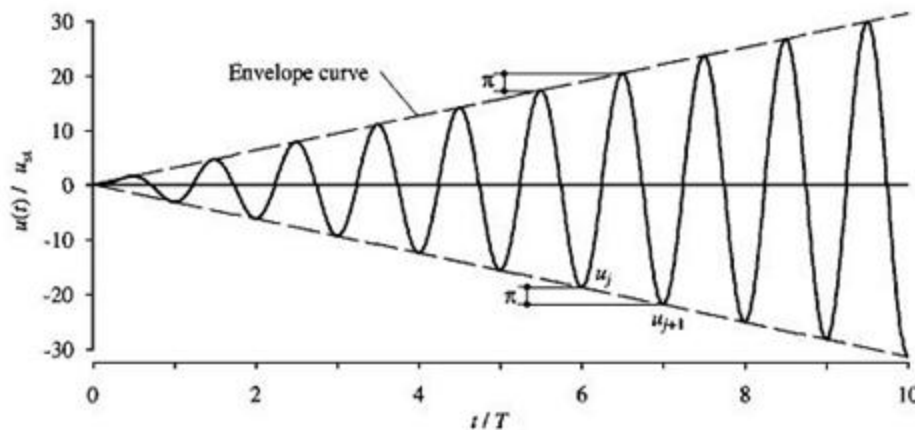
حالتی که فرکانس بار بسیار بزرگتر از فرکانس سازه باشد

$$\bar{\omega} \gg \omega \Rightarrow \beta \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\beta^2} \rightarrow 0, \frac{\beta}{1-\beta^2} \rightarrow 0 \Rightarrow R(t) \rightarrow 0$$

بدین معنی که تغییر شکل ارتعاشی برای نیروهای با سرعت نوسان زیاد، بسیار کوچک است.

## حالت خاص (۳) $\bar{\omega} = \omega$

حالتی که فرکانس بار برابر با فرکانس سازه باشد حالت تشدید یا همگامی (resonance) نامیده می‌شود.

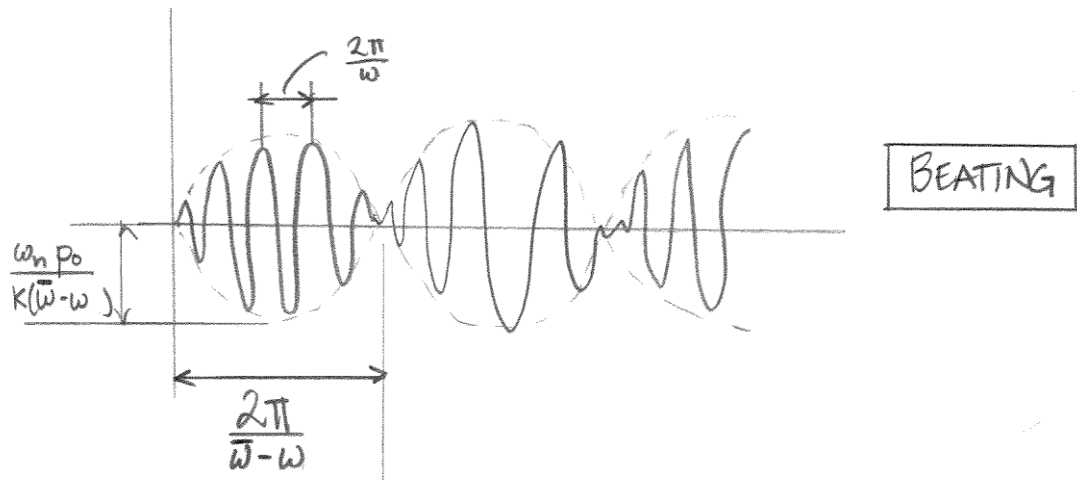


در این حالت انتخاب تابع  $G \sin \omega t$  به عنوان حل خصوصی امکان پذیر نیست چون این تابع قسمتی از حل عمومی نیز می باشد. حل خصوصی به شکل  $Gt \cos \omega t$  خواهد بود که منجر می شود به:

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{2k} \omega t \cos \omega t$$

## حالت خاص (۴) $\bar{\omega} \rightarrow \omega$

همفاز شدن و غیر همفاز شدن دو مؤلفه پاسخ در زمانهای مختلف باعث ایجاد پدیده ضربان (Beating) می شود.



**توجه:** باید سرعت مؤلفه حالت گذرا برای حذف سرعت حالت پایا کافی باشد بنحوی که شیب صفر در لحظه  $t=0$  ایجاد شود به این ترتیب شرایط اولیه رضا گردد.

اگر  $\bar{\omega}$  به  $\omega$  میل کند  $\bar{\omega} - \omega \rightarrow 0$  در این صورت حالت تشدید بروز خواهد کرد.



## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت با میرایی

■ معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی میرا شونده تحت بار هارمونیک به صورت ذیل خواهد بود:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

جواب عمومی  $u_c(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$

جواب خصوصی  $u_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega}t + G_2 \cos \bar{\omega}t$

با جایگذاری جواب مزبور در معادلات حرکت ضرایب ثابت  $G_1$  و  $G_2$  به صورت ذیل به دست می آیند.

$$G_1 = \frac{P_0}{K} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad G_2 = \frac{P_0}{K} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

بنابراین:

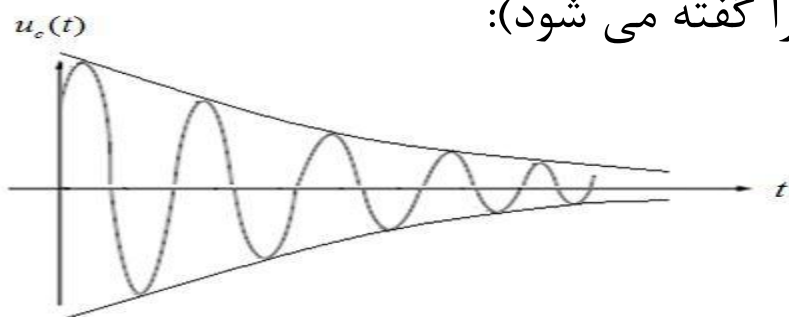
$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \sin \bar{\omega}t + \frac{p_0}{k} \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \cos \bar{\omega}t$$

## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت با میرایی

14

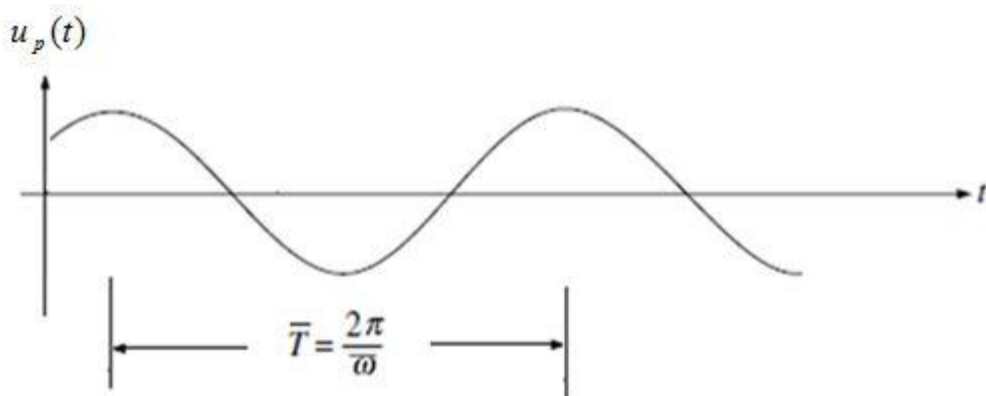
■  $u_c(t)$  پاسخ گذرا (transient) است که دامنه آن به واسطه عامل میرایی به مرور زمان کاهش

می یابد (و از همین رو است که به آن پاسخ گذرا گفته می شود):



■  $u_p(t)$  پاسخ پایا (steady state) است که به صورت ثابت با زمان جریان خواهد داشت (مادامی

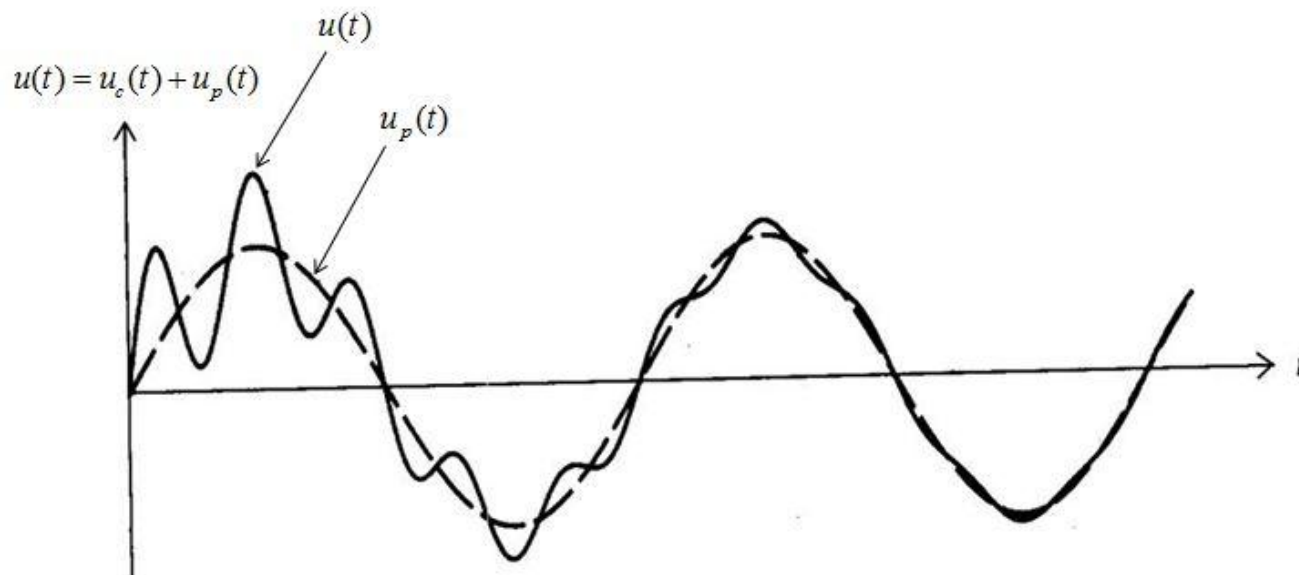
که بار بر سازه اعمال گردد).



## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت با میرایی

15

■  $u(t)$  پاسخ کلی از ترکیب دو پاسخ گذرا و پایا به شکل زیر بدست می آید.



اختلاف دو نمودار ناشی از پاسخ گذرا بوده که بتدریج مستهلک شده و اثر آن از بین می رود.

# استخراج فرم معادلی برای پاسخ پایا

$$u_p(t) = u_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \frac{(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

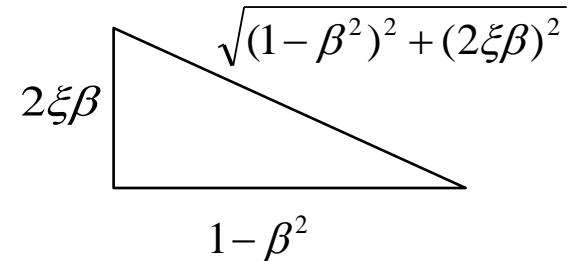
با تعریف  $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$  و  $u_{st} = \frac{p_o}{k}$  خواهیم داشت:

$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot \frac{(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot [\cos \theta \sin \bar{\omega}t - \sin \theta \cos \bar{\omega}t] = u_{st} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

در رابطه فوق:

$\theta$  = زاویه فاز (Phase Angle)

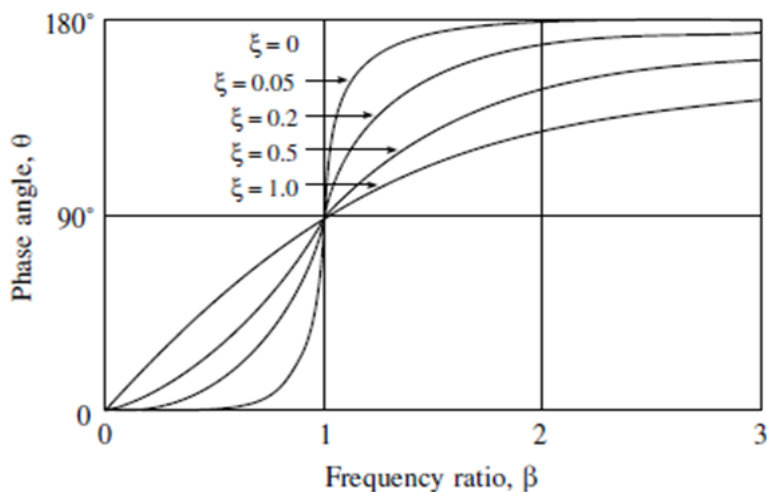
$D$  = ضریب بزرگنمایی دینامیکی (Dynamic Magnification Factor)

# بررسی پاسخ پایای سیستم های میرا شونده تحت بار هارمونیکی

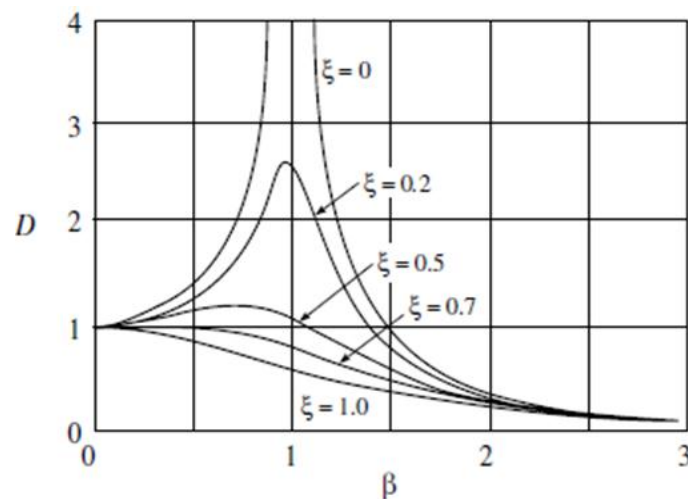
ضریب بزرگنمایی دینامیکی و زاویه فاز بستگی به دو پارامتر  $\xi$  و  $\beta$  دارند

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



نمودار زاویه فاز - نسبت فرکانس تحت میرایی های متفاوت



نمودار  $D - \beta$  تحت نسبت میرایی های متفاوت

## پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت با میرایی

بحث:

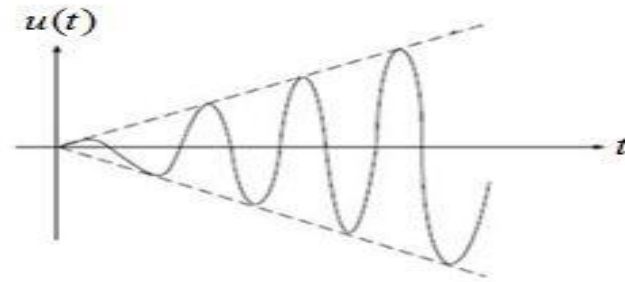
■ با توجه به نمودار  $\theta$ - $\beta$  برای حالت بدون میرایی ( $\xi = 0$ ):

- اگر  $\beta < 1$  آنگاه  $\theta = 0$  ← جهت بار و تغییر مکان یکسان (همفاز)
- اگر  $\beta = 1$  آنگاه  $\theta = 90^\circ$  ← اختلاف فاز  $90^\circ$  ← دامنه حرکت به  $\infty$  میل می کند
- اگر  $\beta > 1$  آنگاه  $\theta = 180$  ← کاهش تغییر مکان با افزایش نیرو (غیر همفاز)

# پاسخ به بارگذاری هارمونیک - حالت با میرایی

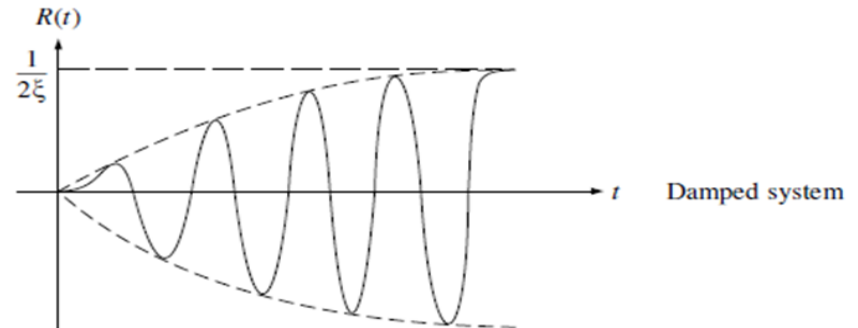
■ اگر  $\beta = 1$  و  $\xi = 0$  آنگاه:

$$D = \infty \quad \text{و} \quad \theta = 90$$



■ اگر  $\beta = 1$  و  $\xi \neq 0$  آنگاه:

$$D = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (2\xi)^2}} = \frac{1}{2\xi}$$



پدیده تشدید ( $\beta = 1$ ) در حالت با میرایی

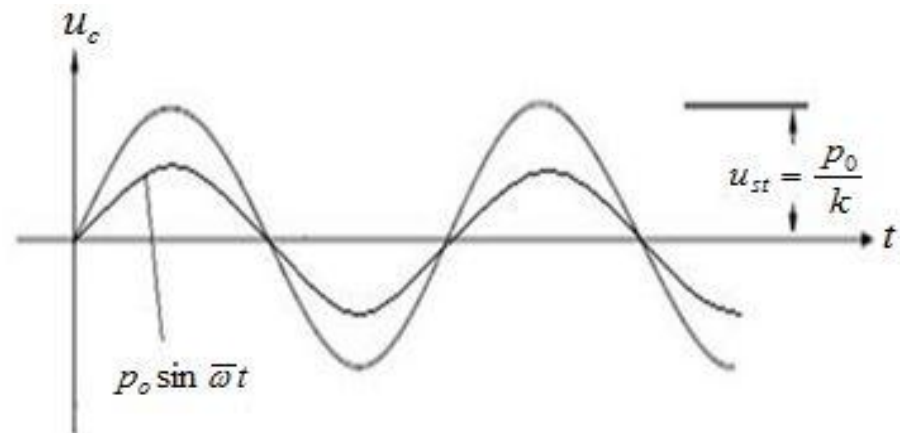
حالت خاص (۱)  $\bar{\omega} \ll \omega$

حالتی که فرکانس بار بسیار کمتر از فرکانس سازه باشد

$$\bar{\omega} \ll \omega \Rightarrow \beta \ll 1$$

ارتعاش هم فاز  $\theta \rightarrow 0$  ,  $D \approx 1$  با توجه به نمودارهای اسلاید قبل

$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta) \cong u_{st} \cdot \sin(\bar{\omega}t)$$





## نکات مهم :

- تغییر مکان هم فاز نیرو است
- دامنه تغییر مکان به سختی  $k$  بستگی دارد.
- رفتار تحت کنترل سختی STIFFNESS CONTROL
- بار سینوسی وارده به آرامی اعمال شده  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \rightarrow 0$  و نظیر یک بار استاتیکی عمل می کند.

حالت خاص (۲)  $\bar{\omega} \gg \omega$

حالتی که فرکانس بار بسیار بزرگتر از فرکانس سازه باشد

$$\bar{\omega} \gg \omega \Rightarrow \beta \gg 1$$

ارتعاش غیر هم فاز ( out of phase vibration )  $\theta \rightarrow 180$  ,  $D \rightarrow 0$

$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$= u_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi) = u_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^4 - 2\beta^2 + 1 + 4\xi^2\beta^2}} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

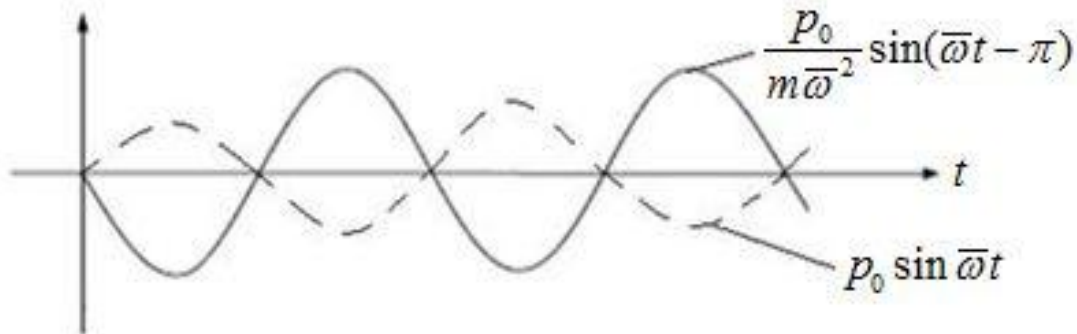
$$= u_{st} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^4}} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi) = u_{st} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi) = \frac{P_0}{k \left( \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right)} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi) = \frac{P_0}{m\bar{\omega}^2} \cdot \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

## نکات مهم:

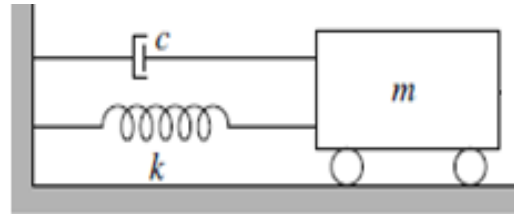
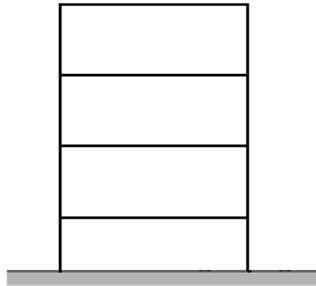
تغییر مکان و نیرو  $180^\circ$  اختلاف فاز دارند (در خلاف جهت هم هستند)

دامنه تغییر مکان به  $\frac{P_0}{m\bar{\omega}}$  بستگی دارد.

رفتار تحت کنترل اینرسی Inertia Control



# آموزه هایی برای طرح لرزه ای

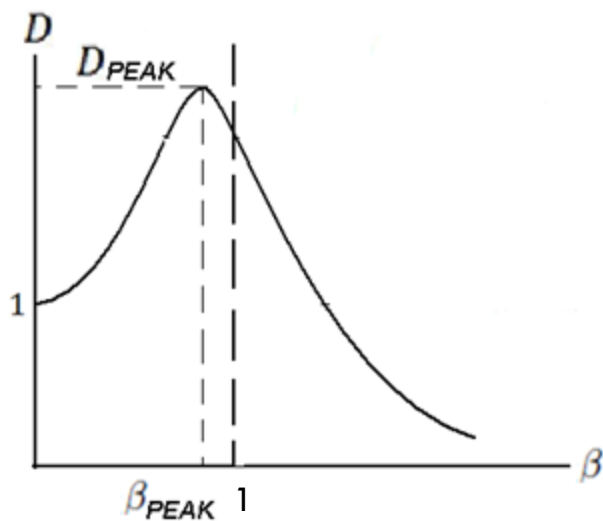


■ چگونه می توان جابجایی سازه تحت بار زلزله (که خیلی شبیه بار سینوسی  $p_0 \sin \bar{\omega} t$ ) است را کاهش داد؟

(۱) اگر  $\bar{\omega} \gg \omega \leftarrow \beta \gg 1 \leftarrow$  سیستم تحت کنترل جرم (اینرسی)  $\leftarrow$  سازه سنگین طراحی شود.

(۲) اگر  $\bar{\omega} \ll \omega \leftarrow \beta \ll 1 \leftarrow$  سیستم تحت کنترل سختی  $\leftarrow$  سازه سخت طراحی شود.

- حالتی را که نسبت فرکانس برابر با یک باشد ( $\beta=1$ ) یعنی وقتی فرکانس بار وارده برابر با فرکانس طبیعی ارتعاش سازه باشد ( $\bar{\omega} = \omega$ ) حالت تشدید نامیده می شود.
- اگر چه مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی  $D$  در این حالت به حداکثر مقدار آن نزدیک است، ولی این حالت بیانگر مقدار پاسخ ماکزیمم هر سیستم میراشونده ای نمی باشد.
- در واقع مقدار دقیق نسبت فرکانس مربوط به پاسخ ماکزیمم را می توان با مشتق گیری از رابطه  $D$  نسبت به  $\beta$  و مساوی صفر قرار دادن آن بدست آورد:



$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4\xi^2 - 2)\beta^2 + \beta^4}}$$

$$\frac{dD}{d\beta} = -\frac{1}{2} (1 + (4\xi^2 - 2)\beta^2 + \beta^4)^{-3/2} (2(4\xi^2 - 2)\beta + 4\beta^3)$$

$$0 = \frac{1}{2} D^3 (4\beta)(1 - \beta^2 - 2\xi^2) \rightarrow 1 - \beta^2 - 2\xi^2 = 0$$

$$\beta_{peak} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

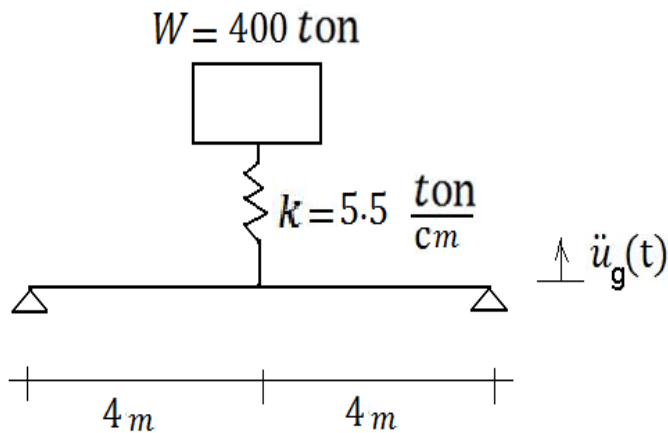
$$D_{peak} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

**مثال:** تیر نشان داده شده وزنه  $W=400 \text{ ton}$  را در وسط خود بر روی فنری به سختی  $k=5.5 \text{ ton/cm}$  تحمل می کند. مدول ارتجاعی تیر  $E=2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  و ممان اینرسی تیر  $I=25170 \text{ cm}^4$  می باشد. اگر میرایی سیستم 10% در نظر گرفته شده و از وزن تیر صرف نظر شود، با فرض اینکه تیر تحت شتاب پایه قائم زیر قرار گیرد مطلوبست تعیین:

$$\ddot{u}_g(t) = 0.35g \sin 5t$$

الف- زمان تناوب طبیعی ارتعاش تیر،

ب- تغییر مکان، سرعت و واکنش تکیه گاهی در لحظه  $t=2 \text{ s}$



$$k_{beam} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^6 \times 25170}{800^3} = 4955.3 \text{ kgf/cm}$$

$$k_{spring} = 5.5 \text{ ton/cm} = 5500 \text{ kgf/cm}$$

$$k = \frac{k_{beam} \cdot k_{spring}}{k_{beam} + k_{spring}} = \frac{4955.3 \times 5500}{4955.3 + 5500} = 2606.7 \text{ kgf/cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{mg}} = \sqrt{\frac{2606.7 \times 981}{400 \times 10^3}} = 2.528 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.528} = 2.48 \text{ s}$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$W = 400000 \text{ kgf} \rightarrow m = \frac{400000}{981} = 407.75 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$$

$$u(t) = \frac{P_{o,\text{eff}}}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{5}{2.528} = 1.978$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = \tan^{-1} \frac{2 \times 0.1 \times 1.978}{1-1.978^2} = -7.735^\circ = -0.135 \text{ rad}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-1.978^2)^2 + (2 \times 0.1 \times 1.978)^2}} = \frac{1}{2.939} = 0.34$$

$$u(t) = \frac{P_{0,eff}}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \frac{-140000}{2606.7} \times 0.34 \sin(5t + 0.135) = -18.26 \sin(5t + 0.135)$$

$$u(t = 2s) = -18.26 \sin(5 \times 2 + 0.135) = -11.91 \text{ cm}$$

$$\dot{u}(t) = -18.26 \times 5 \cos(5t + 0.135)$$

$$\dot{u}(t = 2s) = -91.3 \sin(5 \times 2 + 0.135) = -69.22 \text{ cm/s}$$

$$f_s(t = 2s) = ku(t = 2s) = 2606.7 \times (-11.9) = -31020 \text{ kgf}$$

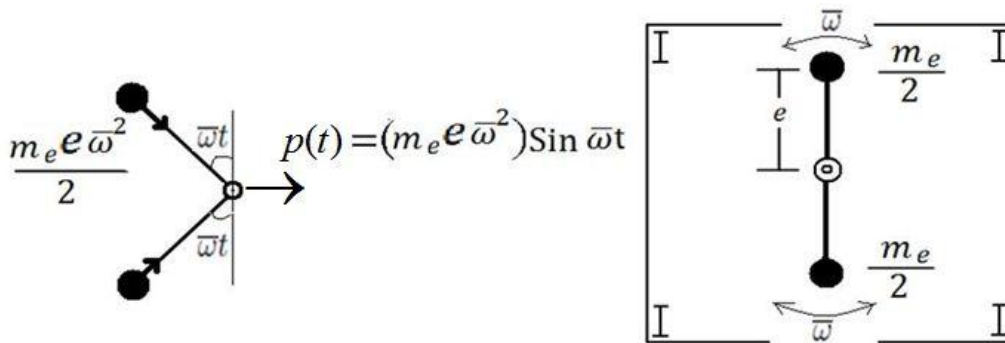
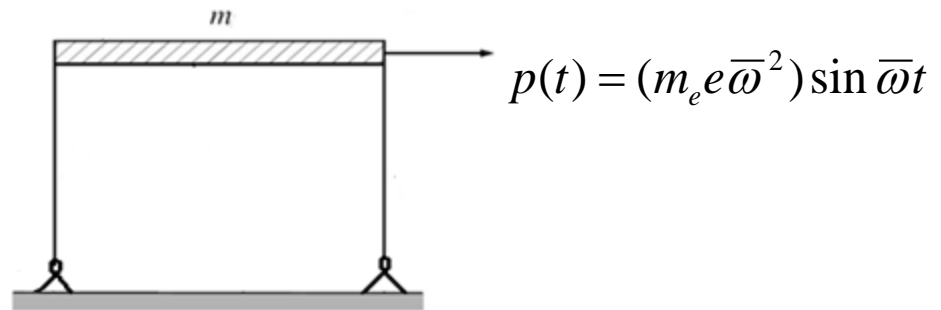


# دستگاه های مولد ارتعاش (یا ماشین های لرزش)

## Vibration Generator (Shaking Machine)

29

- از دستگاه های مولد ارتعاش برای اعمال نیروهای هارمونیک بر سازه های واقعی در آزمایش های تمام مقیاس full scale استفاده می شود.
- شکل زیر دستگاه مولد ارتعاش را نشان می دهد که از دو وزنه دوار با جرم  $m_e/2$  بصورت جرم متمرکز با برون محوری  $e$  که در خلاف جهت یکدیگر، با سرعت زاویه ای ثابت  $\bar{\omega}$  دوران می کنند تشکیل یافته است.



## دستگاه های مولد ارتعاش (یا ماشین های لرزش)

### Vibration Generator (Shaking Machine)

30

معادله حرکت 
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega}t = (m_e e \bar{\omega}^2) \sin \bar{\omega}t$$

■ چون بطور متداول  $m_e \ll m$  می باشد برای تحریک سازه معمولاً لازم است دستگاه مولد ارتعاش با فرکانس بالا به حرکت درآید.

■ از دستگاه مولد ارتعاش می توان برای اندازه گیری فرکانس طبیعی و نسبت میرایی سازه استفاده کرد.

# محاسبه فرکانس طبیعی سازه به کمک دستگاه مولد ارتعاش

■ معادله پاسخ پایا تحت بار هارمونیکی به شکل زیر می باشد:

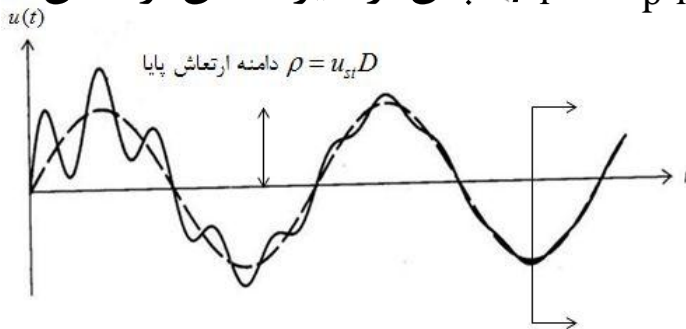
$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

دامنه ارتعاش پایا  $\rho = u_{p \max} = u_{st} D$

■ اندازه گیری فرکانس طبیعی سازه به کمک دستگاه مولد ارتعاش در طی روند تجربی زیر امکان پذیر خواهد گردید:

۱- راه اندازی دستگاه مولد ارتعاش با فرکانس دلخواه  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_i$

۲- اندازه گیری دامنه ارتعاش پایا ( $\rho_i \equiv u_{p \max} \equiv u_{st} D$ ) پس از میرا شدن ارتعاش



حذف ارتعاش گذرا

گذرا

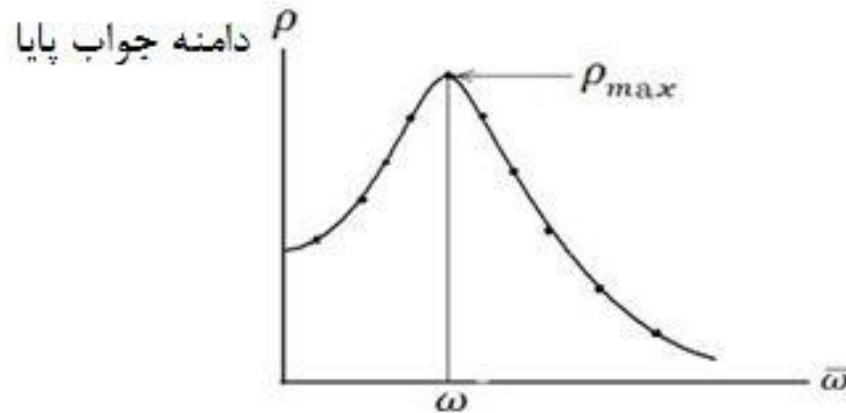
تکرار مراحل ۱ و ۲ به تعداد دفعات لازم

## محاسبه فرکانس طبیعی سازه به کمک دستگاه مولد ارتعاش

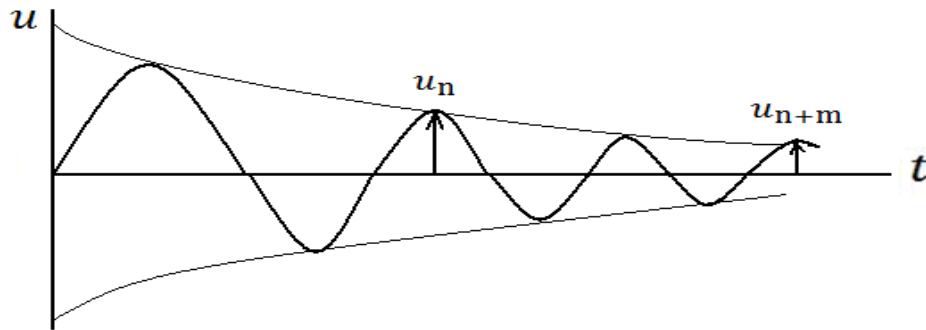
32

۳- ترسیم منحنی تغییرات دامنه تغییرمکان در برابر فرکانس ارتعاشی دستگاه مولد ارتعاش

۴- تعیین فرکانس متناظر با دامنه تغییرمکان حداکثر که برابر با فرکانس طبیعی سازه خواهد بود.



یکی از متداولترین و ساده ترین روشهای تعیین میرایی، اندازه گیری میزان کاهش دامنه حرکت ارتعاش آزاد است که مفصلاً در فصل تحت عنوان روش کاهش لگاریتمی و روش نیم دامنه توضیح داده شد.



$$\delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+m}} = 2\pi m \xi$$

در ادامه به توضیح روشهایی پرداخته می شود که در آنها از دستگاه مولد ارتعاش برای اندازه گیری میرایی استفاده می شود این روشها عبارتند از:

- ۱- روش تقویت تشدید
- ۲- روشهای پهنای باند
- ۳- روش میرایی لزجی معادل

## RESONANT AMPLIFICATION METHOD

34

پاسخ پایا تحت بار هارمونیکی بصورت زیر بیان شد:

$$u_p(t) = u_{st} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega}t - \theta) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

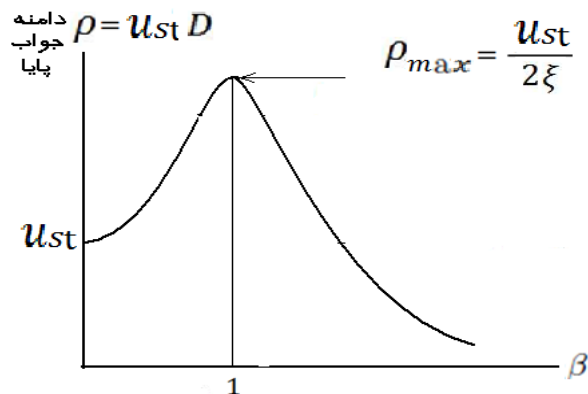
$$\rho = u_{p \max} = u_{st} D$$

دامنه ارتعاش پایا

■ در اینجا نیز سازه به کمک دستگاه مولد ارتعاش با فرکانس های مختلف  $\omega_i$  تحریک می شود و

دامنه ارتعاش پایا ( $\rho_i$ ) در هر حالت اندازه گیری می شود.

■ منحنی تغییرات دامنه جواب پایا ( $\rho_i$ ) بر حسب نسبت فرکانس های مختلف ( $\beta_i$ ) رسم می شود.



■ چون حداکثر دامنه ارتعاش پایا به ازای  $D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \approx \frac{1}{2\xi}$  اتفاق می افتد. لذا:

$$\rho_{\max} = u_{st} \cdot \frac{1}{2\xi}$$

$$\xi \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{st}}{\rho_{\max}}$$

■ روش تقویت تشدید روش ایده آلی نیست، چون اندازه‌گیری پاسخ تشدید بخصوص در مواردی که میرایی سازه خیلی کم باشد کاری پیچیده و در بعضی موارد ناممکن است. چون تغییرمکانهای بسیار بزرگ موجب خرابی سازه و ورود به ناحیه رفتار غیر خطی سازه می شود.

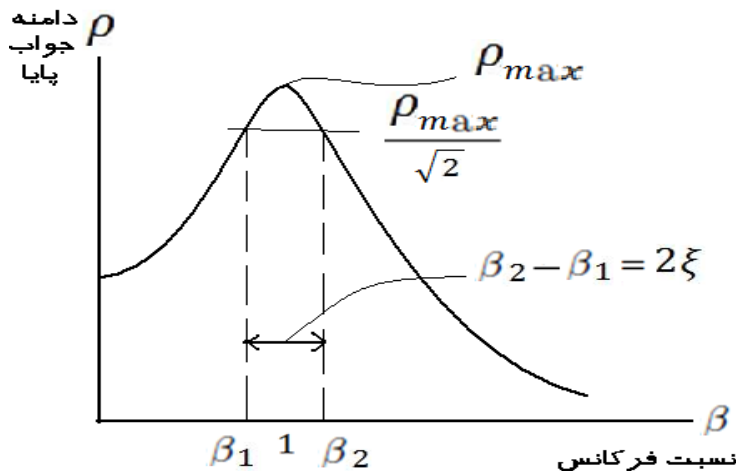
### BAND WITH (HALF POWER)

■ سازه به کمک دستگاه مولد ارتعاش با فرکانس های مختلف تحریک شده و دامنه ارتعاش پایا ( $\rho$ ) در هر حالت اندازه گیری می شود.

■ منحنی تغییرات دامنه جواب پایا ( $\rho$ ) بر حسب نسبت فرکانس های مختلف ( $\beta$ ) رسم می شود.

■  $\beta_1$  و  $\beta_2$  نسبت های فرکانس متناظر با دامنه  $\frac{\rho_{max}}{\sqrt{2}}$  از روی منحنی مزبور تعیین می شود.

■ نسبت میرایی از رابطه زیر محاسبه می شود:



$$\xi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$$



## ۲) روش پهنای نوار (نیم توان)

### BAND WITH (HALF POWER)

37

■ اثبات رابطه  $\xi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$  :

با توجه به اینکه نسبت های فرکانس  $\beta_1$  و  $\beta_2$  متناظر با دامنه تغییر مکان  $\frac{\rho_{max}}{\sqrt{2}}$  می باشند لذا:

$$\rho = \frac{\rho_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$u_{st} \cdot D = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{st} \cdot D_{max}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\xi}$$

$$(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = 8\xi^2 \rightarrow \beta^4 + 2(2\xi^2 - 1)\beta^2 + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$\beta^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{If } \xi \ll 1 \text{ then } \beta^2 = 1 \pm 2\xi$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 - 2\xi} = 1 - \frac{1}{2}(2\xi) - \dots \simeq 1 - \xi$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 + 2\xi} = 1 + \frac{1}{2}(2\xi) - \dots \simeq 1 + \xi$$

$$\beta_2 - \beta_1 = (1 + \xi) - (1 - \xi) \rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 2\xi$$

به کمک رابطه بسط سری دو جمله ای:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \times 4}x^2 + \frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6}x^3 - \dots ; -1 < x \leq +1$$

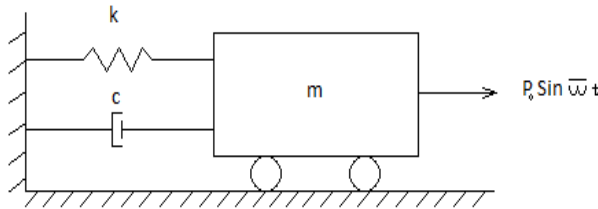
## EQUIVALENT VISCOUS DAMPING

- میرایی لزج خطی که در آن نیرویی میرایی متناسب با سرعت در نظر گرفته می شود ساده ترین شکل میرایی مورد استفاده است. چون معادله دیفرانسیل حرکت خطی شده و حل تحلیلی آن به سادگی امکان پذیر می شود.
- در سازه های واقعی میرایی دارای طبیعت پیچیده ای می باشد و مکانیسم های مختلفی نظیر اصطکاک داخلی، مقاومت سیال و... در میرایی سازه تأثیر گذار هستند.
- میرایی سازه های واقعی معمولاً با میرایی لزج خطی معادل نشان داده می شود.
- متداول ترین روش برای تعریف میرایی لزج معادل، مساوی قرار دادن انرژی تلف شده در هر سیکل ارتعاش سازه واقعی، با انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی می باشد.

# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

■ برای تعیین انرژی تلف شده در هر سیکل یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی ابتدا باید رابطه

نیروی میرایی-تغییر مکان متناظر تعیین شود.



پاسخ تغییر مکان حالت پایا

$$u(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \rightarrow \sin^2(\bar{\omega}t - \theta) = \left(\frac{u}{\rho}\right)^2$$

پاسخ سرعت

$$\dot{u}(t) = \bar{\omega} \rho \cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

نیروی میرایی

$$f_D = c\dot{u}(t) = c\bar{\omega} \rho \cos(\bar{\omega}t - \theta) \rightarrow \cos^2(\bar{\omega}t - \theta) = \left(\frac{f_D}{c\bar{\omega}\rho}\right)^2$$

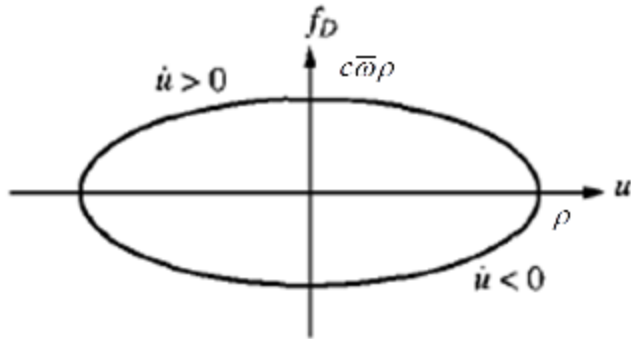
$$\cos^2(\bar{\omega}t - \theta) + \sin^2(\bar{\omega}t - \theta) = 1 \rightarrow \left(\frac{f_D}{c\bar{\omega}\rho}\right)^2 + \left(\frac{u}{\rho}\right)^2 = 1$$

# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

40

■ پس رابطه نیروی میرایی بر حسب تغییرمکان در سیستم ایده آلی با میرایی لزج خطی، به شکل یک بیضی می باشد.

■ مساحت این بیضی برابر است با:



$$W_D = \pi c \bar{\omega} \rho^2$$

■ که اندازه این مساحت،  $W_D$ ، برابر با مقدار انرژی تلف شده به وسیله مکانیزم میرایی دستگاه در یک سیکل کامل می باشد، زیرا:

$$\begin{aligned} W_D &= \int_0^{\bar{T}} f_D du = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} c\dot{u} du = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} c\dot{u} (\dot{u} dt) = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} c\dot{u}^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} c\bar{\omega}^2 \rho^2 \cos^2(\bar{\omega}t - \theta) dt = \pi c \bar{\omega} \rho^2 \end{aligned}$$

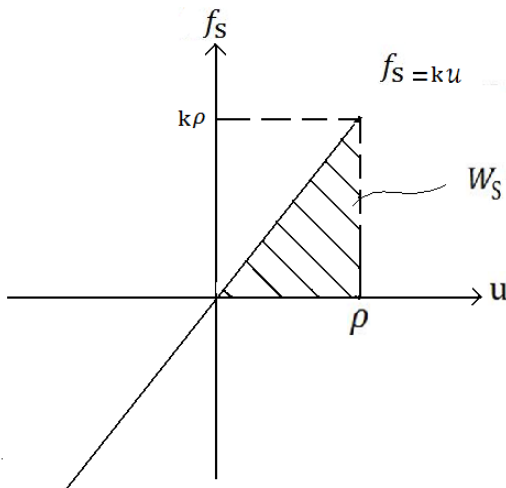
# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

بنابراین نسبت میرایی  $\xi$  از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$c = \frac{W_D}{\pi \bar{\omega} \rho^2} \quad , \quad \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c\omega}{2m\omega^2} = \frac{W_D \omega}{2\pi \bar{\omega} \rho^2 k}$$

با توجه به رابطه خطی نیرو-تغییر مکان فنر ( $f_s = ku$ ) کار مربوط به تغییر مکان فنر بصورت انرژی ارتجاعی در دستگاه ذخیره شده و برابر است با:

$$W_s = \frac{1}{2} k \rho^2 \quad \text{انرژی تغییر شکل ارتجاعی (انرژی کرنشی)}$$



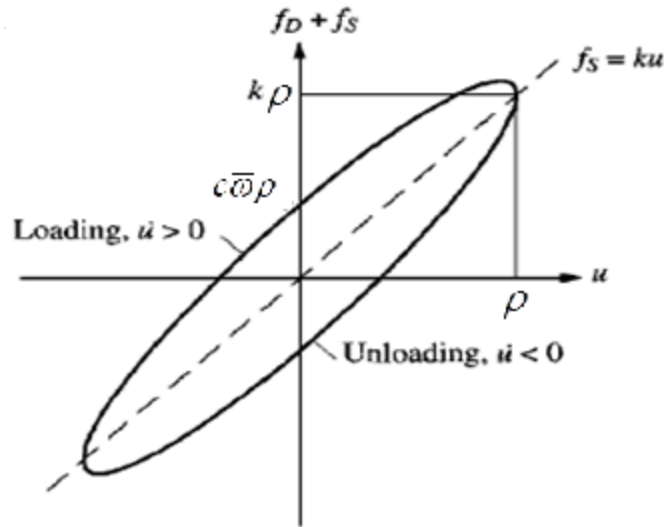
لذا رابطه درصد میرایی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{W_D}{W_s} \frac{\omega}{\bar{\omega}} \quad (i)$$

# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

مجموع نیروهای  $f_D$  و  $f_S$  (نیروی مقاوم کل شامل نیروی الاستیک و میرایی) را می توان در یک شکل بر حسب تغییر مکان  $u$  رسم نمود. حلقه ای که در شکل دیده می شود حلقه هیستریزیس (پسماند) نامیده می شود.

$$f_S + f_D = k u(t) + \dot{u}(t)$$

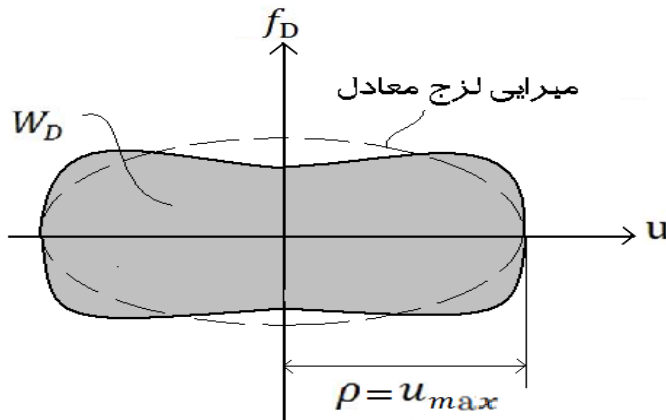


همانطور که ملاحظه می شود نمودار  $f_S + f_D$  در مقابل  $u$  بیضی شکل می باشد که به علت جمله  $ku$  در رابطه فوق مطابق شکل دوران نموده است. هنوز هم انرژی تلف شده به علت میرایی مساوی سطح محصور بین منحنی است، چون سطح محصور توسط منحنی تک مقدار نیروی الاستیک  $f_S \equiv ku$ ، مساوی صفر است.

# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

عملاً در آزمایشات نیروی مقاوم کل (نیروی الاستیک به اضافه نیروی میرایی) قابل اندازه گیری است (با توجه به رابطه  $f_S + f_D = p(t) - f_I = p_0 \sin \bar{\omega}t - m\ddot{u}(t)$  با اندازه گیری  $\ddot{u}(t)$  براحتی می توان نیروی مقاوم کل را محاسبه کرد).

در سیستم های با میرایی غیر لزج (حالتی که نیروی میرایی به طور خطی وابسته سرعت نباشد)، شکل منحنی نیروی میرایی- تغییر مکان به صورت بیضی نبوده، بلکه بعنوان مثال به صورت منحنی ای مطابق شکل زیر خواهد بود. در این حالت می توان یک ضریب میرایی لزجی معادل تعریف کرد، بطوریکه همان اتلاف انرژی هر سیکل را که بر روی نمودار نیرو-جابجایی مشاهده می شود، اعمال نماید. مقدار میرایی لزج معادل را می توان با یک بیضی که مساحت و حداکثر تغییر مکان آن به ترتیب مساوی مساحت و حداکثر تغییر مکان نمودار واقعی است، تعریف نمود.



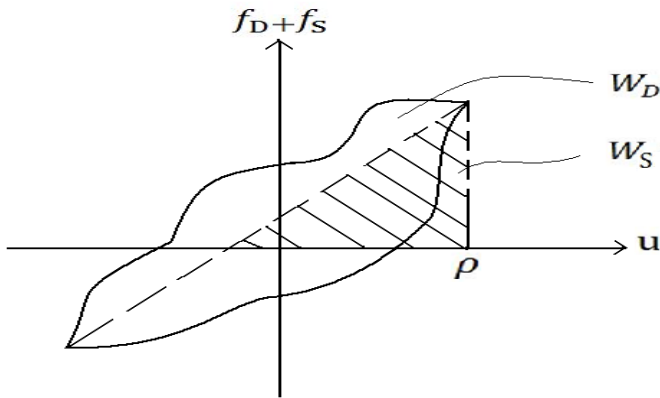
$$C_{eq} = \frac{W_D}{\pi \bar{\omega} \rho^2}$$

# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی

اما در عمل برای تعیین میرایی لزج معادل یک سیستم واقعی، دستگاه در حالت تشدید قرار داده می شود. برای این منظور فرکانس تحریک باید بنحوی تنظیم شود که اختلاف فاز پاسخ تغییر مکان نسبت به نیروی اعمالی ۹۰ درجه باشد. (یعنی وقتی تغییر مکان حداکثر است نیرو از نقطه صفر عبور نماید)

$$\bar{\omega} = \omega$$

نمودار نیروی مقاوم کل ( $f_S + f_D$ ) در مقابل  $u$  ترسیم،  $W_D$  و  $W_S$  مطابق شکل اندازه گیری می شود. بر اساس رابطه (i) و با توجه به اینکه سیستم در حالت تشدید می باشد نسبت میرایی سازه از رابطه ساده زیر تعیین می شود:



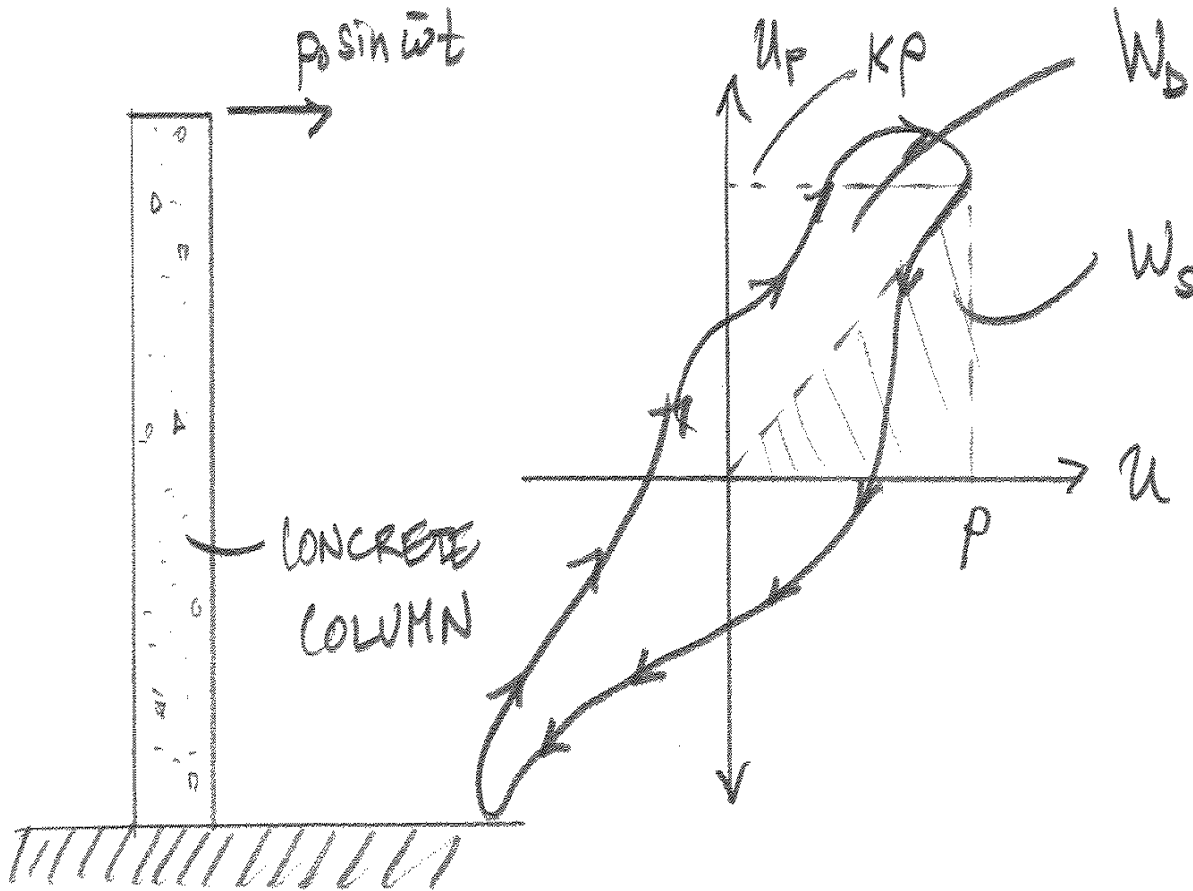
$$\xi_{eq} = \frac{1}{4\pi} \frac{W_D}{W_S}$$

ضریب سختی  $k$  فنر را برابر با ضریب زاویه خطی که بطور تقریبی حد میانی دو منحنی رفت و برگشت یک دوره ارتعاش را مشخص می کند انتخاب می کنیم که بر همین اساس داریم:

$$W_S = \frac{1}{2} k \rho^2 \rightarrow k = \frac{2W_S}{\rho^2}$$



# انرژی تلف شده در یک سیستم ایده آل با میرایی لزج خطی



$$\int_{EQ} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{W_D}{W_S} \right) \frac{W_D}{\omega}$$

# فصل سوم

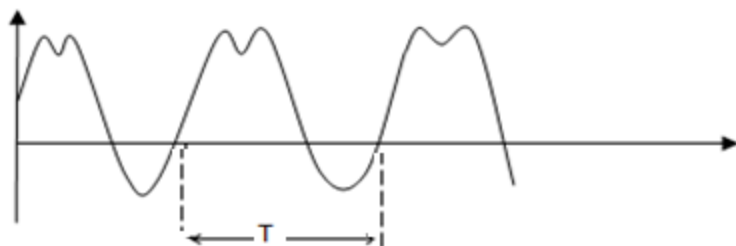
## ارتعاش اجباری

### قسمت دوم: بارگذاری تناوبی

# واکنش سیستم های یک درجه آزادی نسبت به بارگذاری تناوبی

2

□ بارهای تناوبی بارهایی هستند که در فواصل زمانی مساوی تکرار می شوند.

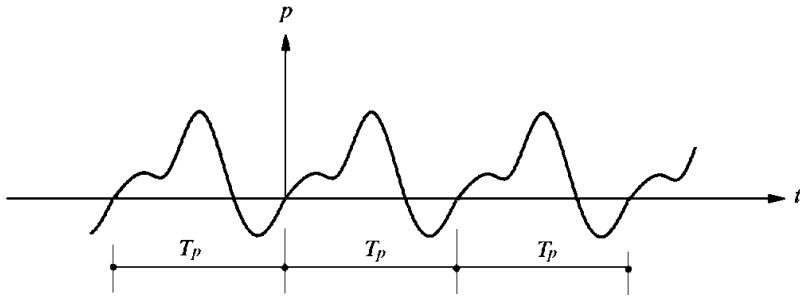


□ از معادلاتی که بیانگر واکنش یک سیستم یک درجه آزادی نسبت به بارگذاری هارمونیک هستند می توان برای بیان واکنش سیستم یک درجه آزادی نسبت به هر نوع بارگذاری تناوبی استفاده کرد.

□ ابتدا به کمک سری فوریه بارهای تناوبی بصورت مجموعه ای از بارهای هارمونیک نوشته می شود. سپس واکنش نسبت به هر جمله این سری، دقیقاً همان واکنش نسبت به یک بارگذاری هارمونیک محاسبه می شود. واکنش کل، مطابق با اصل ترکیب آثار قوا برابر خواهد بود با مجموع واکنش ها نسبت به هر جزء بارگذاری.

## بیان بارگذاری به صورت سری فوریه

3



□ هر بارگذاری تناوبی دلخواهی نظیر بارگذاری شکل مقابل را می توان به صورت سری فوریه بیان کرد:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t$$

که در آن  $T_p$  دوره تناوب تابع بوده و ضرایب را نیز می توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2n\pi}{T_p} t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2n\pi}{T_p} t dt$$

# بیان بارگذاری به صورت سری فوریه :

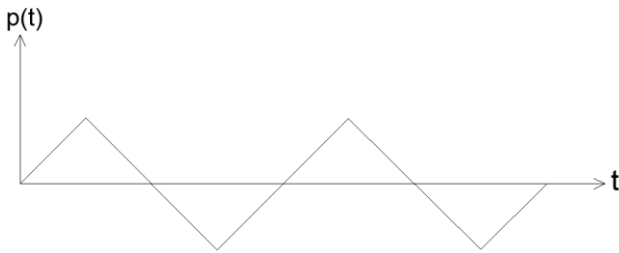
4

□ اگرچه به لحاظ تئوری، تعداد جملات مورد نیاز برای نمایش سری فوریه مربوط به بار  $p(t)$  می‌باید بینهایت باشد ولی عملاً به علت وجود همگرایی سریع در این نوع سری ها معمولاً  $p(t)$  را می‌توان با تعداد اندکی از جملات نشان داد.

## حالات خاص

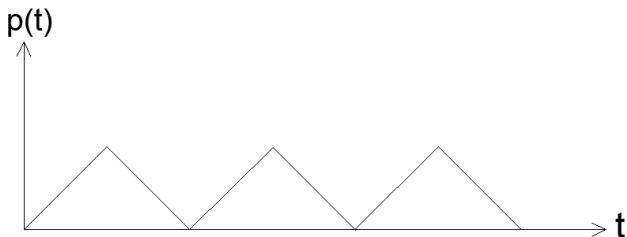
(۱) اگر  $p(t)$  تابعی فرد از  $t$  باشد یعنی  $p(-t) \equiv -p(t)$  :

$$a_0 = a_n = 0 \quad b_n \neq 0$$



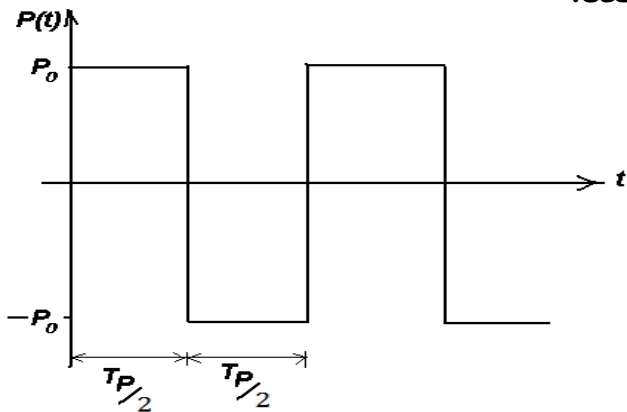
(۲) اگر  $p(t)$  تابعی زوج از  $t$  باشد یعنی  $p(-t) \equiv p(t)$  :

$$a_0 \neq 0 \quad a_n \neq 0 \quad b_n = 0$$



# بیان بارگذاری به صورت سری فوریه

**مثال ۱:** سری فوریه مربوط به بارگذاری زیر را تعیین نموده و نمایش ترسیمی سری فوق را برای جمله اول، دو جمله اول و سه جمله اول مشخص نماید.



$$p(t) = \begin{cases} p_0 & 0 < t < \frac{T_p}{2} \\ -p_0 & \frac{T_p}{2} < t < T_p \end{cases}$$

$$p(-t) = -p(t) \quad \rightarrow \quad a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt = \frac{2}{T_p} \left( \int_0^{\frac{T_p}{2}} p_0 \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt + \int_{\frac{T_p}{2}}^{T_p} (-p_0) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt \right)$$

$$= \frac{2p_0}{T_p} \cdot \frac{T_p}{2n\pi} \left( -\cos \frac{2n\pi}{T_p} t \Big|_0^{\frac{T_p}{2}} + \cos \frac{2n\pi}{T_p} t \Big|_{\frac{T_p}{2}}^{T_p} \right) = \frac{p_0}{n\pi} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos 2n\pi - \cos n\pi)$$

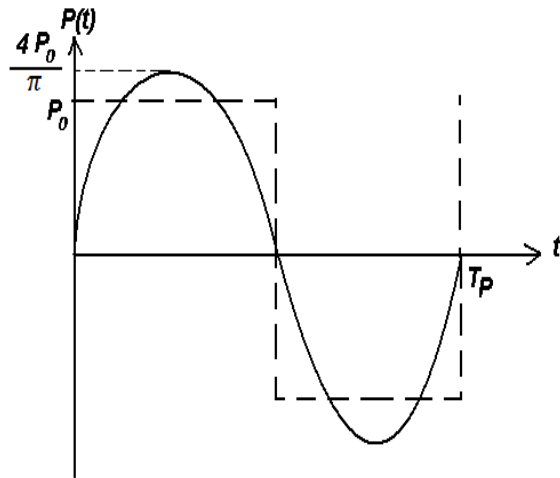
## بیان بارگذاری به صورت سری فوریه

6

$$b_n = \frac{2p_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \rightarrow p(t) = \begin{cases} \frac{4p_0}{n\pi} & , \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & , \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

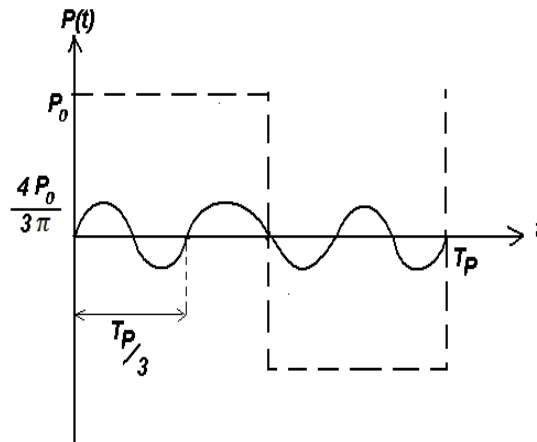
$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t \\ &= \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{4p_0}{n\pi} \sin \frac{2\pi n}{T_p} t \\ &= \frac{4p_0}{\pi} \sin \frac{2\pi}{T_p} t + \frac{4p_0}{3\pi} \sin \frac{6\pi}{T_p} t + \frac{4p_0}{5\pi} \sin \frac{10\pi}{T_p} t + \dots \end{aligned}$$

# بیان بارگذاری به صورت سری فوریه



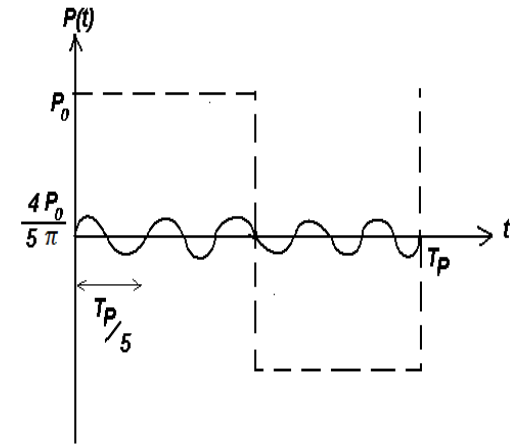
جمله اول  $\frac{4p_0}{\pi} \sin \frac{2\pi}{T_p} t$

با دوره تناوب  $T_p$  و دامنه  $\frac{4p_0}{\pi}$



جمله دوم  $\frac{4p_0}{3\pi} \sin \frac{6\pi}{T_p} t$

با دوره تناوب  $\frac{T_p}{3}$  و دامنه  $\frac{4p_0}{3\pi}$



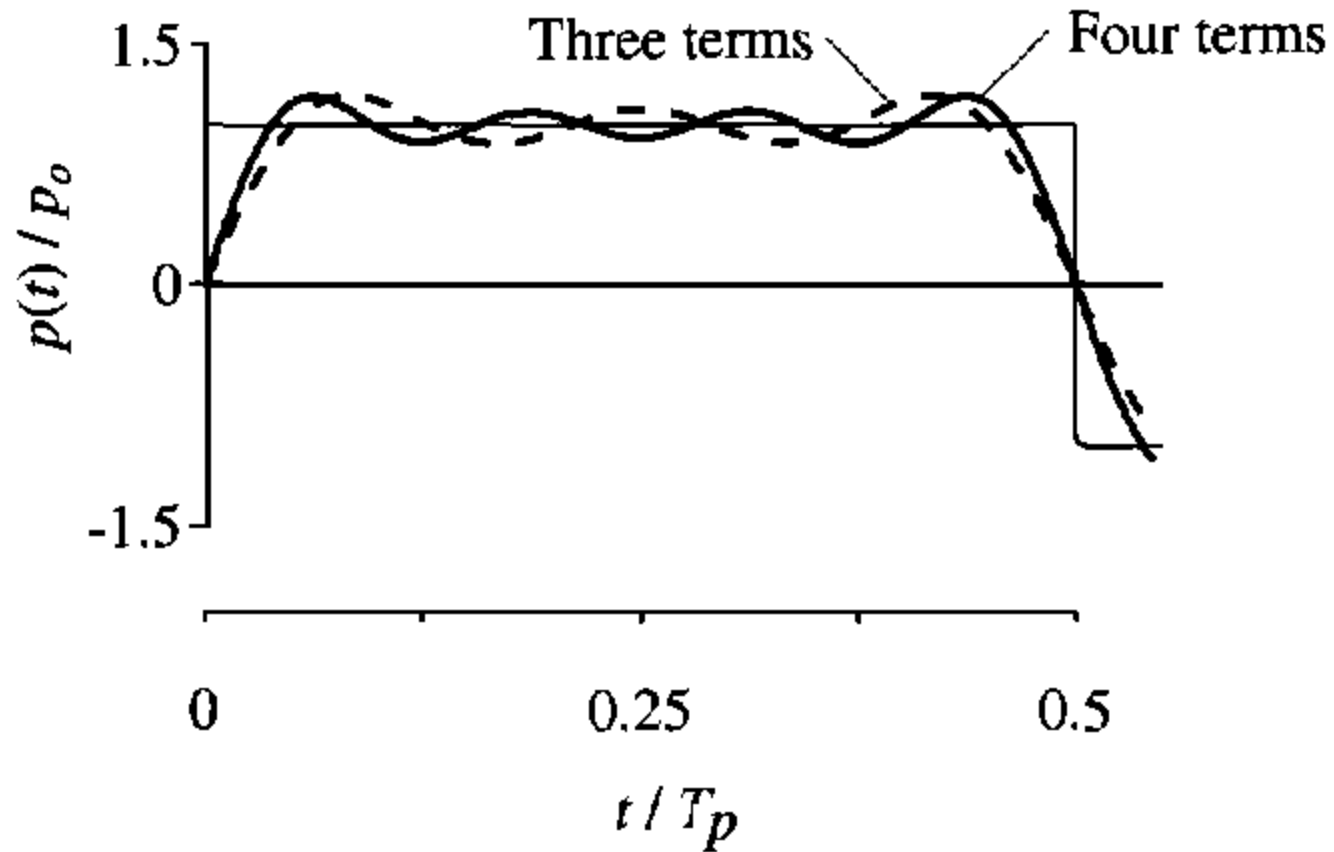
جمله سوم  $\frac{4p_0}{5\pi} \sin \frac{10\pi}{T_p} t$

با دوره تناوب  $\frac{T_p}{5}$  و دامنه  $\frac{4p_0}{5\pi}$



## بیان بارگذاری به صورت سری فوریه

8



## Response to Periodic Loads

9

■ ملاحظه شد هر بارگذاری تناوبی را می توان بصورت یک سری فوریه نوشت. بنابراین:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t$$

■ و اگر از نمادهای زیر استفاده کنیم:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p} \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_n = \frac{2\pi n}{T_p} = n\bar{\omega}_1$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\bar{\omega}_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\bar{\omega}_1 t$$

■ بر این اساس عناصر سری فوریه بار عبارت خواهند بود از :

(۱) یک بار ثابت (ضریب  $a_0$  که نمایانگر مقدار متوسط بار است)

(۲) مجموعه ای از بارهای هارمونیک کسینوسی با دامنه  $a_n$  و فرکانس  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p}$

(۳) مجموعه ای از بارهای هارمونیک سینوسی با دامنه  $b_n$  و فرکانس  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p}$

## Response to Periodic Loads

### فرضیات تحلیل:

- (۱) بار تناوبی موجود دارای زمان تداوم طولانی می باشد. در لحظه مورد مطالعه، پاسخ گذرا که بستگی به سرعت اولیه دارد مستهلک شده است (یعنی پاسخ گذرا مورد توجه قرار نمی گیرد).
- (۲) رفتار سیستم خطی بوده از اینرو می توان اصل جمع آثار قوا را به کار برد.

□ با این فرضیات پاسخ پایای سیستم میرا شونده به تحریک تناوبی  $p(t)$ ، ترکیب پاسخ های مربوط به جملات جداگانه سری فوریه می باشد:

$$u(t) = u_p(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^s(t)$$

که در آن:

$u_n^s$  پاسخ به جزء سینوسی  $n$  ام بار

$u_n^c$  پاسخ به جزء کسینوسی  $n$  ام بار

$u_0$  پاسخ به جزء ثابت بار

## Response to Periodic Loads

(۱) محاسبه  $u_o$  پاسخ به جزء ثابت بار  $a_0$  (مسأله استاتیکی)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_o$$

$$u_o = \frac{a_o}{k}$$

(۲) محاسبه  $u_n^s(t)$  پاسخ به جزء سینوسی  $n$  ام بار (یعنی  $b_n \sin n\bar{\omega}_1 t$ )

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = b_n \sin n\bar{\omega}_1 t \quad \begin{cases} p_0 = b_n \\ \bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 \end{cases}$$

$$u_n^s(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left[ (1 - \beta_n^2) \sin n\bar{\omega}_1 t - 2\xi\beta_n \cos n\bar{\omega}_1 t \right]$$

که در آن :

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{nT}{T_p}$$

## Response to Periodic Loads

(۳) محاسبه  $u_n^c(t)$  پاسخ به جزء کسینوسی  $n$  ام بار (یعنی  $a_n \cos n\bar{\omega}_1 t$ )

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_n \cos n\bar{\omega}_1 t \quad \begin{cases} p_0 = a_n \\ \bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 \end{cases}$$

$$u_n^c(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left[ (2\xi\beta_n) \sin n\bar{\omega}_1 t + (1 - \beta_n^2) \cos n\bar{\omega}_1 t \right]$$

□ جواب کلی بصورت مجموع پاسخ های همه جملات سری، به شکل زیر خواهد بود :

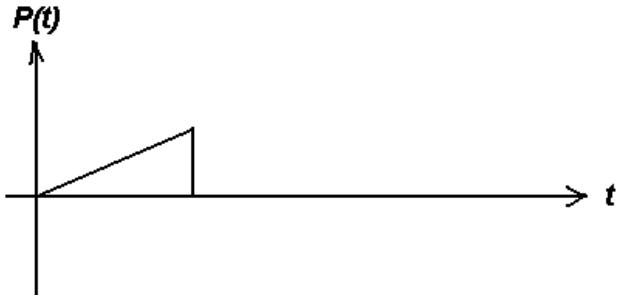
$$u(t) = \frac{1}{k} \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \left\{ [a_n 2\xi\beta_n + b_n (1 - \beta_n^2)] \sin n\bar{\omega}_1 t + [a_n (1 - \beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n] \cos n\bar{\omega}_1 t \right\} \right)$$

□ در صورت عدم وجود میرایی  $\xi=0$ ، پاسخ سیستم تحت بار تناوبی مطابق رابطه زیر خواهد بود :

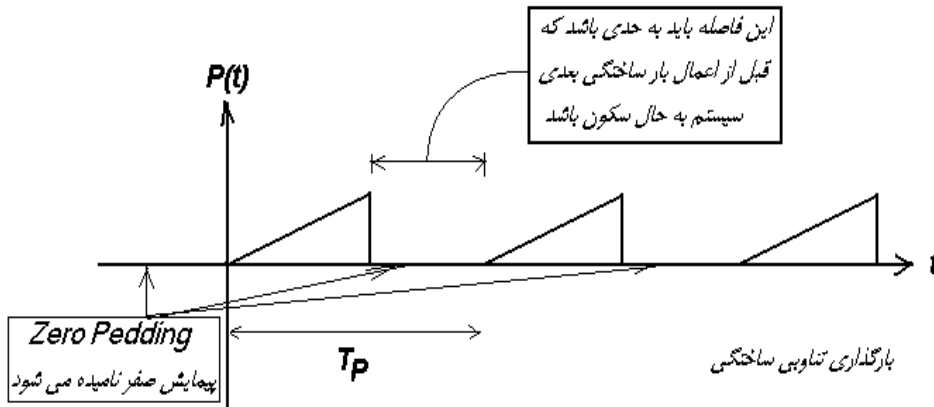
$$\text{if } \xi = 0 \rightarrow u(t) = \frac{1}{k} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} (a_n \cos n\bar{\omega}_1 t + b_n \sin n\bar{\omega}_1 t) \right]$$

# آیا می توان تحلیل مربوط به بارگذاری تناوبی را در مورد بارهای غیر تناوبی بکار برد؟

13



■ برای این منظور می توان بار تناوبی فرضی ساختگی متناظر با بارگذاری فوق را بشکل زیر در نظر گرفت:

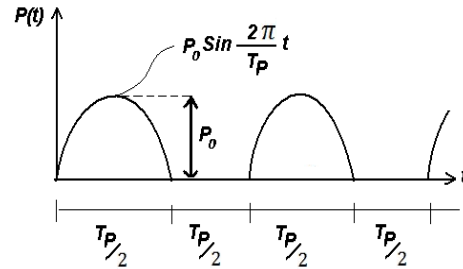
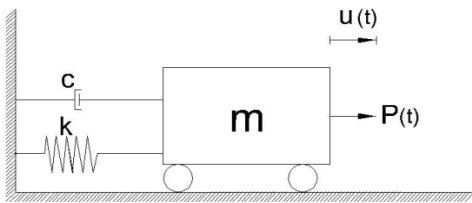


■ اما در این حالت باید علاوه بر جواب خصوصی، جواب عمومی هم در نظر گرفته شود.

## Response to Periodic Loads

14

**مثال ۳:** سیستم یک درجه آزادی تحت بارگذاری شکل زیر قرار دارد. این بارگذاری شامل قسمت مثبت یک تابع سینوسی ساده می باشد. با فرض اینکه سیستم بدون میرایی بوده و دوره تناوب بارگذاری برابر با چهار سوم دوره تناوب ارتعاش سازه باشد، واکنش سیستم را تعیین نمایید.



ضرایب فوریه برای این بارگذاری با استفاده از معادلات (۲) بدست می آید:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p_0 \sin \frac{2\pi}{T_p} t dt = \frac{P_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p_0 \sin \frac{2\pi}{T_p} t \cos \frac{2n\pi}{T_p} t dt = \begin{cases} 0 & , \quad n = \\ \frac{P_0}{\pi} \frac{2}{1 - \pi^2} & , \quad n = \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p_0 \sin \frac{2\pi}{T_p} t \sin \frac{2n\pi}{T_p} t dt = \begin{cases} \frac{P_0}{2} & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad n > 1 \end{cases}$$

## Response to Periodic Loads

بر این اساس بسط سری فوریه تابع بار موردنظر عبارت خواهد بود از:

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{35} \cos 6\bar{\omega}_1 t - \dots \right) \quad (i)$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}$$

که در آن :

است. با توجه به اینکه دوره تناوب بارگذاری برابر با  $4/3$  دوره تناوب ارتعاش سازه است نتیجه می شود:

$$\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3} \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = \beta_1 = \frac{3}{4} \quad \frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} = \beta_2 = \frac{3}{2} \quad (ii)$$

و در نهایت واکنش پایای این سازه با جایگذاری در معادله پاسخ تحت بارهای تناوبی بدست خواهد آمد:

$$u(t) = \frac{p_0}{k\pi} \left( 1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t \dots \right)$$



## Response to Periodic Loads

### شکل نمایی سری فوریه :

عبارات سری فوریه را که طبق معادلات (۱) و (۲) بصورت توابع مثلثاتی ارائه شدند، به کمک فرمول اولر، می توان بصورت تابع نمایی نیز نوشت:

$$\sin x = -\frac{1}{2}i(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2}i(e^{ix} + e^{-ix}) \quad (1)$$

در اینصورت سری فوریه به شکل نمایی زیر تبدیل می شود :

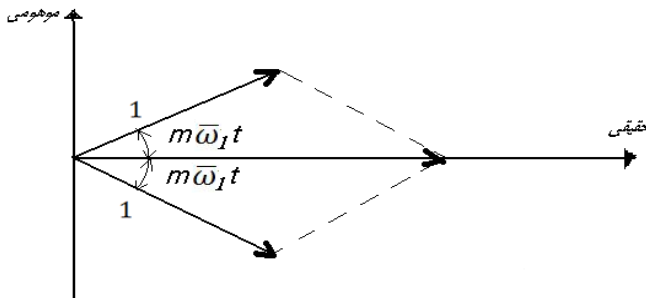
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n \exp(in\bar{\omega}_1 t) \quad (2) \quad \text{به طوریکه:}$$

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \exp(-in\bar{\omega}_1 t) dt \quad (3)$$

## Response to Periodic Loads

17

قابل ذکر است که در معادله (۲) به ازای هر مقدار مثبت  $n$ ، مثلاً  $n=+m$ ، یک مقدار متناظر  $n=-m$  نیز وجود دارد. دو جمله  $\exp(in\bar{\omega}_1 t)$  و  $\exp(-in\bar{\omega}_1 t)$  را می توان بترتیب بعنوان بردارهای دورانی واحدی در خلاف جهت گردش عقربه های ساعت و در جهت آن فرض نمود که سرعت زاویه ای این بردارها، مطابق شکل زیر،  $m\bar{\omega}_1$  می باشد. مؤلفه های موهومی چنین زوج برداری همیشه همدیگر را حذف می کنند. همچنین قابل ذکر است که در معادله (۳) ضریب  $C_{+m}$  مزدوج مختلط  $C_{-m}$  است؛ لذا اگر  $p(t)$  یک تابع حقیقی باشد، تمام جملات موهومی معادله، آن طوری که انتظار می رود حذف می گردند.



با بیان بار متناوب اختیاری به فرم سری فوریه نمایی توسط معادلات (۲) و (۳)، اینک می خواهیم معادلات نمایی واکنش در مقابل بار متناوب را استخراج کنیم. مجدداً، فقط واکنش حالت پایدار مورد بررسی قرار می گیرد و فرض می شود زمان تداوم بار متناوب به اندازه کافی طولانی بوده، بطوریکه جواب حالت گذرا در این مدت میرا شده باشد.

## Response to Periodic Loads

فرض می‌کنیم که تابع بار بصورت  $\exp(i\bar{\omega}t)$  باشد. در اینصورت بنا به معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی، خواهیم داشت:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \exp(i\bar{\omega}t) \quad (4)$$

جواب حالت پایدار این معادله به صورت زیر فرض می‌شود:

$$v(t) = H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) \quad (5)$$

با قرار دادن معادله (۵) در معادله (۴)، تابع  $H(\bar{\omega})$  که تابع مختلط واکنش فرکانس نامیده می‌شود، بدست خواهد آمد:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} \quad (6)$$

با معرفی عبارات مربوط به نسبت فرکانس  $\beta$  و نسبت استهلاک  $\xi$  در معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)}$$

## Response to Periodic Loads

در نتیجه، واکنش مختلط فرکانسی برای باری با فرکانس  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$  به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)}$$

که  $\beta_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega}$  می‌باشد. از معادله (۱۰) می‌توان دریافت که  $H(n\bar{\omega}_1)$  مزدوج مختلط  $H(-n\bar{\omega}_1)$  است.

بنابراین می‌توان جواب حالت پایدار سیستم یک درجه آزادی را برای هر جمله از سری نمایی نوشت. با استفاده از اصل جمع آثار قوا، واکنش حالت دائم یک سیستم در مقابل هر تابع متناوب نیرو بصورت زیر قابل ارائه است:

مزیتی که در سادگی شکل نمایی تحلیل واکنش متناوب وجود دارد وقتی آشکار می‌شود که معادله اخیر با معادل مثلثاتی نظیر آن مقایسه شود.

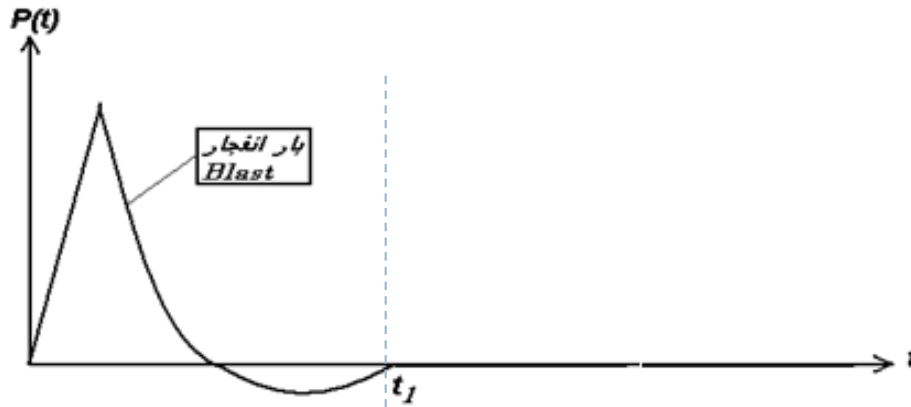
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n\bar{\omega}_1) C_n \exp(in\bar{\omega}_1 t)$$

# فصل سوم

## ارتعاش اجباری

قسمت سوم: بارگذاری ضربه ای

- بارهای ضربه ای عموماً زمان تداوم نسبتاً کوتاهی داشته و از یک ضربه اصلی تشکیل می شوند.
- مثال های عملی: انفجار، برخورد های ناگهانی، ترمز آنی جرثقیل ها و ...



ارتعاش تحت اثر نیرو  
فاز ( I )  
 $0 \leq t \leq t_1$

ارتعاش آزاد تحت اثر نیرو  
فاز ( II )  
 $t > t_1$

تحلیل فاز ( I )  
تحت بار وارده



در  $t_1$   
 $u(t_1)$  و  $\dot{u}(t_1)$



حل ارتعاش آزاد بدون اعمال  
بار تحت شرایط اولیه  $u(t_1)$  و  $\dot{u}(t_1)$

ویژگی مهم بارهای ضربه ای : عموماً دارای زمان تداوم کوتاه هستند.

$$\text{عموماً : } t_1 \ll T$$

وقوع پاسخ حداکثر در فاصله زمانی بسیار کوتاهی پس از اعمال بار

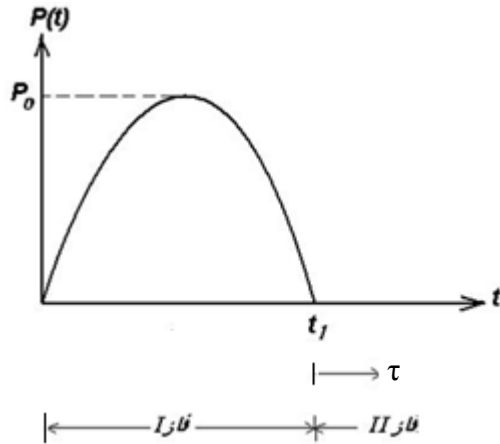
عدم وجود فرصت کافی برای جذب انرژی به واسطه عامل میرای

صرفنظر از میرایی در تعیین پاسخ حداکثر سازه

## Half-Cycle sine pulse

## بارهای ضربه ای نیم سینوسی

4



$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin \bar{\omega} t & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

**فاز I:** پاسخ تحت نیرو

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad 0 \leq t \leq t_1$$

جواب شامل عبارات حالت گذرا و پایا

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (i)$$

با استفاده از رابطه فوق در  $t=t_1$  می توان  $u(t_1)$  و  $\dot{u}(t_1)$  را تعیین کرد.



## فاز II: ارتعاش آزاد

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad t > t_1 \quad \text{شرایط اولیه: } \begin{cases} u(t_1) \\ \dot{u}(t_1) \end{cases}$$

برای سهولت محاسبات متغیر زمانی جدید  $\tau = t - t_1$  تعریف می گردد:

$$\text{شرایط اولیه: } \begin{cases} u(\tau = 0) = u(t_1) \\ \dot{u}(\tau = 0) = \dot{u}(t_1) \end{cases}$$

$$u(\tau) = \frac{\dot{u}(\tau = 0)}{\omega} \sin \omega \tau + u(\tau = 0) \cos \omega \tau$$

$$u(t) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \tau + u(t_1) \cos \omega \tau \quad ; \tau = t - t_1 \geq 0 \quad (ii)$$

معمولاً در بررسی واکنش تحت اثر بارهای ضربه‌ای، واکنش آن در لحظات مختلف (تاریخچه زمانی واکنش) مورد نظر نمی‌باشد، بلکه مقدار پاسخ حداکثر از نظر مهندسی سازه دارای اهمیت و کاربرد است، لذا باید بررسی شود که پاسخ حداکثر در کدام فاز رخ می‌دهد.

اگر فرض شود پاسخ حداکثر در فاز I پدید می‌آید، زمان وقوع پاسخ حداکثر بصورت زیر قابل تعیین خواهد بود:

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \xrightarrow{(i)} \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega}t - \omega \cos \omega t) = 0$$

$$\cos \bar{\omega}t = \cos \omega t$$

$$\bar{\omega}t = 2\pi n \pm \omega t ; \quad n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots \quad (iii)$$

این جواب در صورتی معتبر است که:

$$t \leq t_1 \rightarrow \bar{\omega}t \leq \bar{\omega}t_1 = \frac{2\pi}{2t_1} \cdot t_1 = \pi \rightarrow \bar{\omega}t \leq \pi \quad (iv)$$

با توجه به رابطه (iii) کمترین مقدار  $n$  که به ازای آن پاسخ حداکثر بدست می آید  $n=1$  بوده و برای اینکه شرط  $\bar{\omega}t \leq \pi$  برقرار باشد، در رابطه (iii) باید علامت منفی مورد استفاده قرار گیرد پس:

$$(iii) \rightarrow \bar{\omega}t = 2\pi \times 1 - \omega t$$

$$\bar{\omega}t + \omega t = 2\pi \rightarrow \bar{\omega}t \left(1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}\right) = 2\pi$$

$$\bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{1}{\beta}} \quad (v)$$

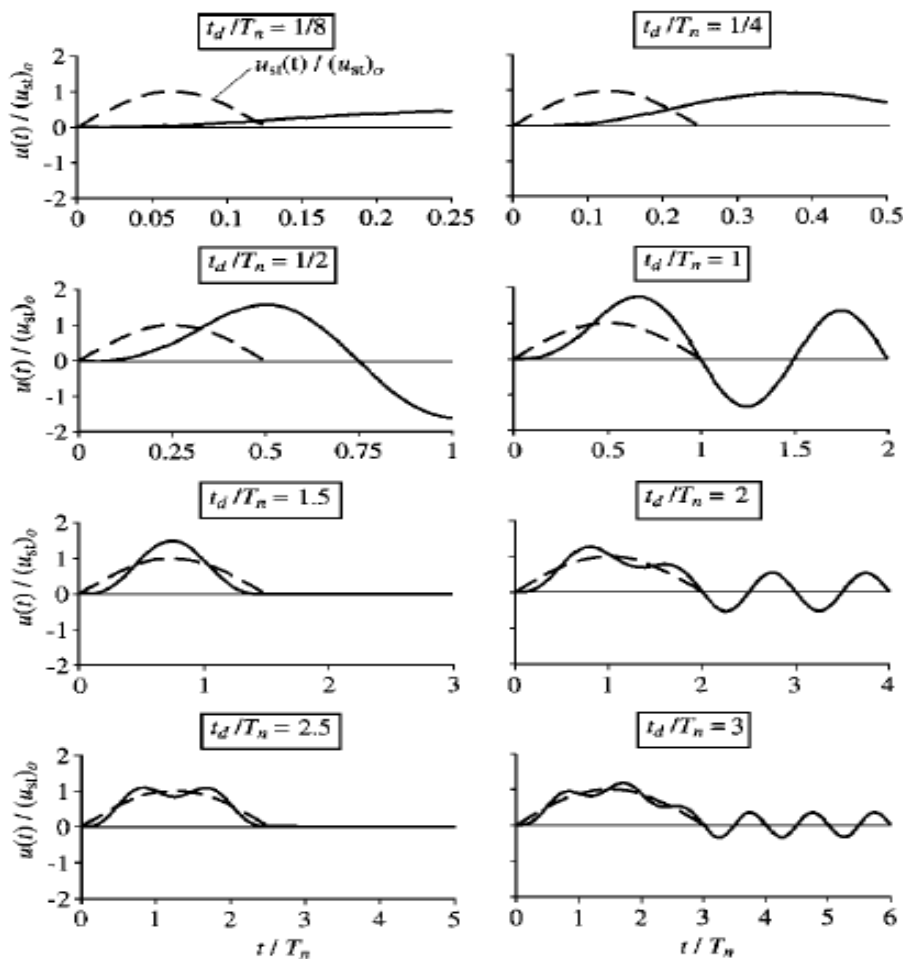
این رابطه برای محاسبه زمان پاسخ حداکثر در صورتی معتبر است که طبق رابطه v:

$$\bar{\omega}t \leq \pi \rightarrow \frac{2\pi}{1 + \frac{1}{\beta}} \leq \pi \rightarrow \begin{cases} \beta \leq 1 \\ or \bar{\omega} \leq \omega \\ or \frac{t_1}{T} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{شرط وقوع پاسخ حداکثر در فاز I})$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \text{if } \beta \leq 1 \rightarrow \text{پاسخ حداکثر در فاز I} \\ \text{if } \beta > 1 \rightarrow \text{پاسخ حداکثر در فاز II} \end{cases}$$

بررسی پاسخ به بارهای ضربه ای نیم سینوسی با زمان های تداوم مختلف



با بررسی نمودارهای پاسخ سیستم به بارهای ضربه ای نیم سینوسی با زمانهای تداوم مختلف به نتایج مهم زیر می رسیم:

✓ طبیعت پاسخ سیستم به زمان تداوم ضربه  $t_1$  بستگی بسیار شدیدی دارد.

✓ اختلاف بین منحنی پاسخ دینامیکی و حل استاتیکی (منحنی خط چین) اثرات دینامیکی بار را نشان می دهد. به ازای  $t_1=3T$  این اختلاف جزئی است. چون تغییرات نیرو به آرامی (نسبت به زمان تناوب طبیعی  $T$  سیستم) صورت می گیرد.

✓ پس از پایان اعمال ضربه، سیستم حول وضعیت تغییر شکل نیافته اولیه نوسان آزاد با دامنه ثابت (به علت عدم وجود میرایی) انجام می دهد.

✓ اگر  $t_1/T=1.5, 2.5, ..$  باشد سیستم پس از پایان اعمال ضربه ( در فاز II ) بدون تغییر مکان باقی می ماند؛ چون در پایان اعمال نیرو ( لحظه  $t=t_1$  ) سرعت و تغییر مکان اولیه صفر است.

# محاسبه ضریب بزرگنمایی دینامیکی پاسخ حداکثر سازه

## ■ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای فاز I ( $\beta \leq 1$ ):

باتوجه به رابطه (v) پاسخ حداکثر با قرار دادن  $t$  مربوط به این رابطه، در رابطه (i) بدست می‌آید بنابراین ضریب بزرگنمایی متناظر عبارت است از:

$$D = \frac{u_{\max}}{u_{st}} = \frac{\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t}{1 - \beta^2}; \quad \beta \leq 1 \text{ or } \frac{t_1}{T} \geq \frac{1}{2} \quad (vi)$$

که در آن:

$$\bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{1}{\beta}} \quad \omega t = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \omega t = \frac{\bar{\omega}t}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta + 1}$$

## ■ ضریب بزرگنمایی برای فاز II ( $\beta > 1$ ):

با توجه به رابطه (ii) پاسخ حداکثر در فاز II دامنه حرکت ارتعاشی آزاد بوده، که عبارت است از:

$$u_{\max} = \rho = \left\{ \left[ \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [u(t_1)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (vii)$$

## محاسبه ضریب بزرگنمایی دینامیکی پاسخ حداکثر سازه :

تغییر مکان و سرعت اولیه برای این فاز با بکار گیری زمان  $t_1$ ، از معادله (i) محاسبه می شود :

$$\begin{cases} \bar{\omega}t_1 = \frac{2\pi}{2t_1} \cdot t_1 = \pi \\ \omega t_1 = \frac{\bar{\omega}t_1}{\beta} = \frac{\pi}{\beta} \end{cases}$$

$$u(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \left( \sin \pi - \beta \sin \frac{\pi}{\beta} \right) = \frac{p_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left( -\sin \frac{\pi}{\beta} \right)$$

$$\dot{u}(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega}t_1 - \beta \omega \cos \omega t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1-\beta^2} \left( -1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \right)$$

با جایگذاری دو رابطه فوق در معادله (vii) نتیجه می شود :

$$u_{\max} = \frac{p_0}{k} \frac{\beta}{1-\beta^2} \left( 2 + 2 \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{p_0}{k} \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

## محاسبه ضریب بزرگنمایی دینامیکی پاسخ حداکثر سازه :

$$D = \frac{u_{\max}}{\frac{p_0}{k}} = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\pi}{2\beta} \quad ; \quad \beta > 1 \text{ or } \frac{t_1}{T} < \frac{1}{2}$$

ملاحظه می شود در هر دو حالت، اعم از اینکه پاسخ حداکثر در فاز I یا II اتفاق بیافتد، D ضریب بزرگنمایی دینامیکی متناظر تنها تابعی از  $\beta$  یا  $t_1/T$  می باشد.

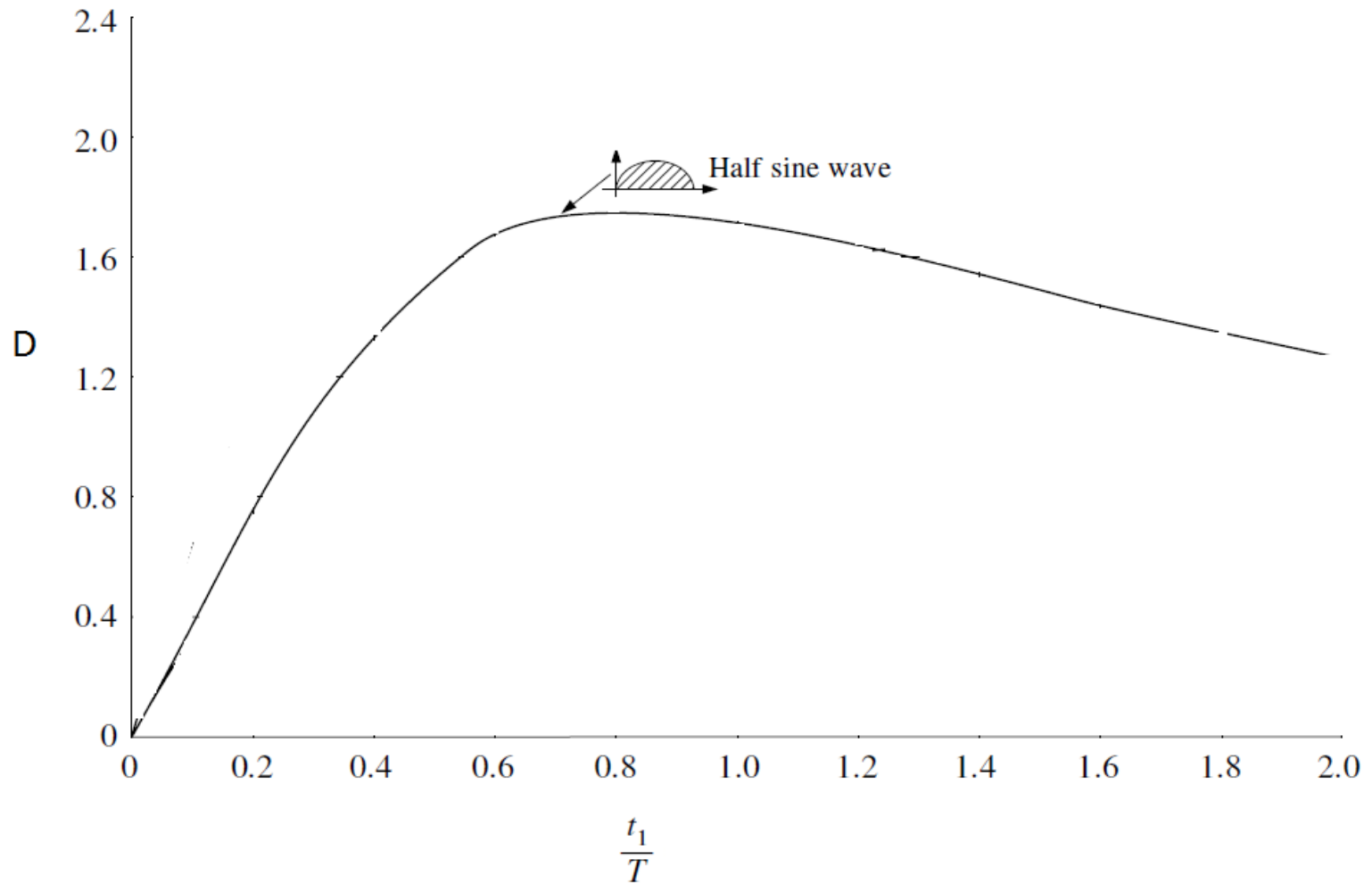
$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{2\pi}{2t_1} = \frac{T}{2t_1} \rightarrow \frac{t_1}{T} = \frac{1}{2\beta}$$

لذا می توان منحنی ضریب بزرگنمایی دینامیکی D را به ازای مقادیر مختلف  $t_1/T$  رسم کرد .  
منحنی بدست آمده را طیف شوک (shock spectra) یا طیف ضربه یا طیف پاسخ تغییرمکان می نامند.



# محاسبه ضریب بزرگنمایی دینامیکی پاسخ حداکثر سازه :

13

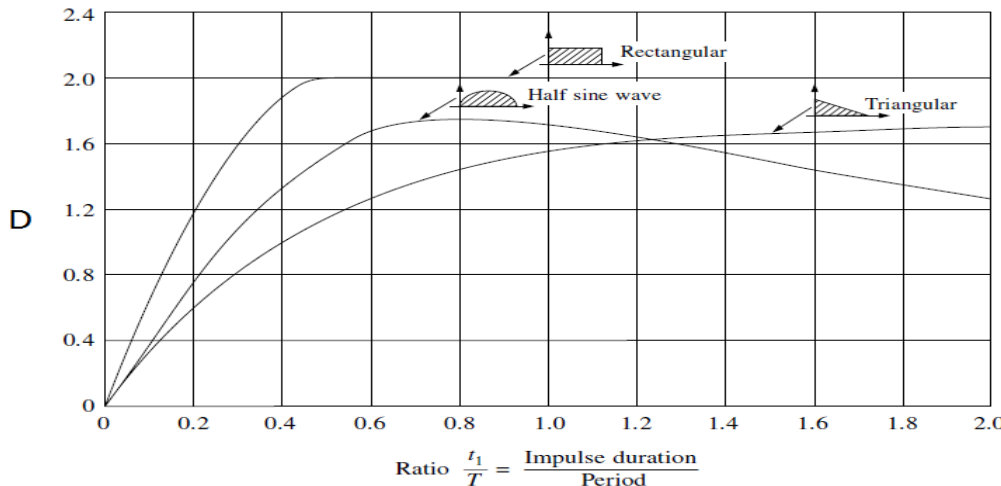


طیف ضربه مربوط به بار نیم سینوسی

با توجه به مثالهای قبل، ملاحظه می شود که واکنش ماکزیمم یک سازه یک درجه آزادی (بدون میرایی) تحت بارهای ضربه‌ای مشخص، فقط بستگی به نسبت  $t_1/T$  یعنی نسبت زمان تداوم ضربه به زمان تناوب طبیعی سازه دارد.

بنابراین به سادگی می توان منحنی تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی را برای مقادیر مختلف  $t_1/T$  برای انواع گوناگون بارگذاری ضربه‌ای رسم کرده است.

این منحنی‌ها را طیف شوک یا طیف ضربه یا طیف پاسخ تغییر مکان می‌نامند.



□ بنابراین با شناخت نوع بارگذاری ضربه ای و زمان تداوم آن ( $t_1$ ) و محاسبه پریود طبیعی سازه ( $T$ ) نسبت  $t_1/T$  تعیین می شود و از روی طیف مربوطه ضریب بزرگنمایی دینامیکی ( $D$ ) بدست می آید که با ضرب کردن آن در مقدار  $p_0/k$  حداکثر واکنش دینامیکی سیستم تحت اثر بارگذاری مورد بحث

تعیین می شود و احتیاجی به تجزیه و تحلیل مفصل دینامیکی دستگاه نخواهد بود.

$$D = \left| \frac{u_{\max}}{\frac{p_0}{k}} \right|$$

□ از طیف ضربه همچنین می توان برای تعیین واکنش حداکثر سازه در برابر ضربه شتاب که به پایه آن

اعمال می شود استفاده کرد، اگر شتاب اعمال شده به پایه  $\ddot{u}_g(t)$  باشد نیروی موثر ضربه ای ناشی از آن بر روی سازه برابر  $p_{eff} = -m\ddot{u}_g(t)$  خواهد بود، اگر حداکثر شتاب پایه  $\ddot{u}_{g_0}$  باشد حداکثر

نیروی موثر ضربه ای  $p_{0,eff} = -m\ddot{u}_{g_0}$  خواهد بود. بنابراین ضریب بزرگنمایی دینامیکی بصورت زیر

$$D = \left| \frac{u_{\max}}{\frac{m\ddot{u}_{g_0}}{k}} \right|$$

نوشته می شود:

معادله فوق را می توان بصورت زیر نیز نوشت:

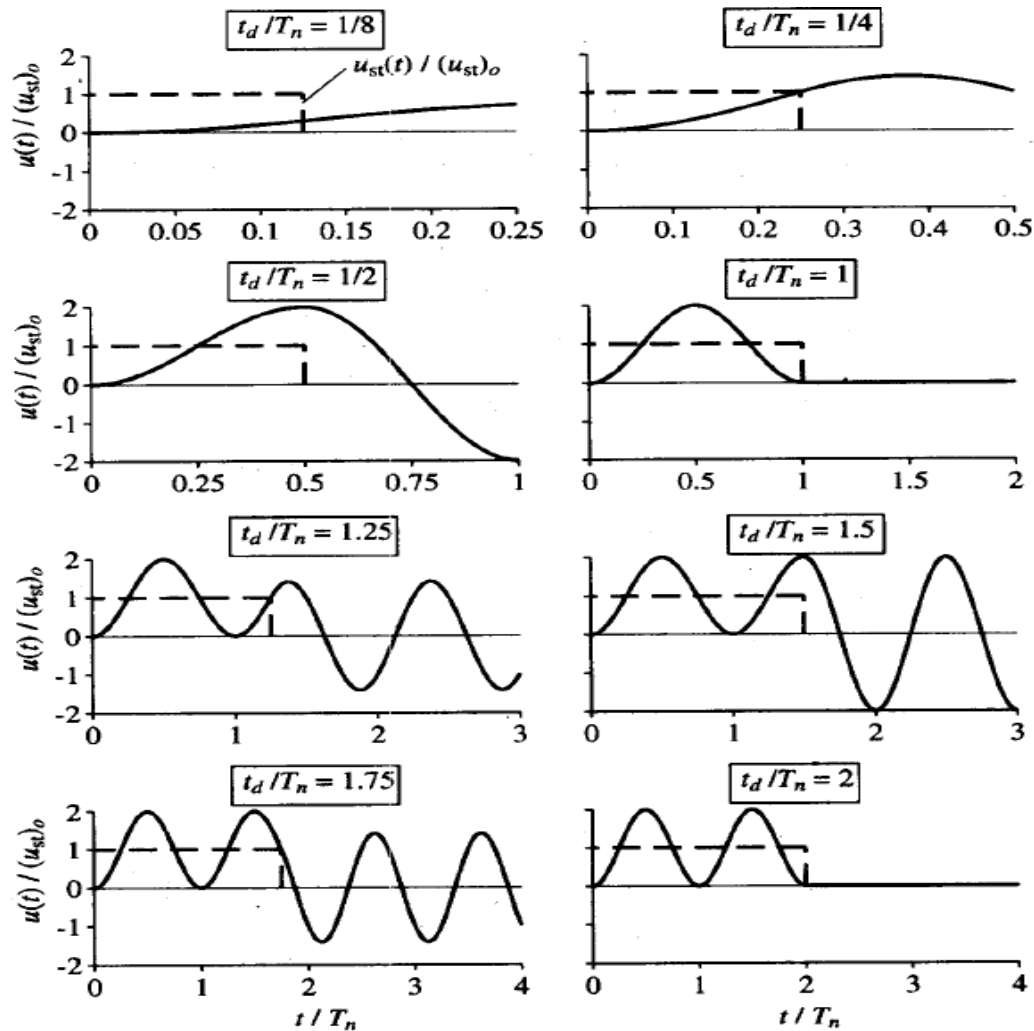
$$D = \left| \frac{\ddot{u}_{\max}^t}{\ddot{u}_{g_0}} \right|$$

که در آن  $\ddot{u}_{\max}^t$  ماکزیمم شتاب کل جرم می باشد، نتیجه اخیر با توجه به این حقیقت بدست می آید که  $m\ddot{u}_{\max}^t$  مساوی نیروی الاستیک فنر  $ku_{\max}$  است .

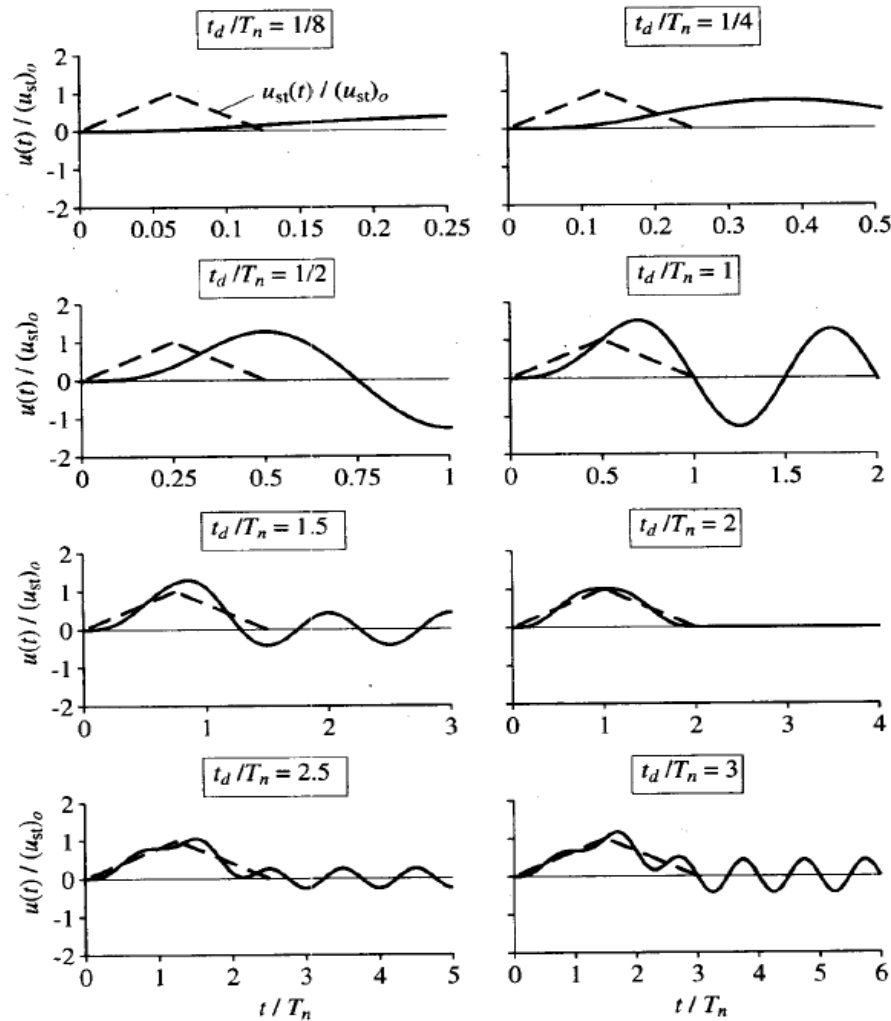
□ بنابراین واضح است که منحنی های طیف ضربه شکل صفحه قبل را می توان علاوه بر استفاده جهت تعیین واکنش تغییرمکان حداکثر در برابر بار ضربه ای، جهت پیش بینی شتاب حداکثر جرم  $m$  در برابر شتاب ضربه ای نیز بکار برد. در صورت چنین کاربردی معمولاً به این نمودارها طیف شوک گفته می شود.

# پاسخ به بارهای ضربه ای مستطیلی Response to rectangular pulse force

17

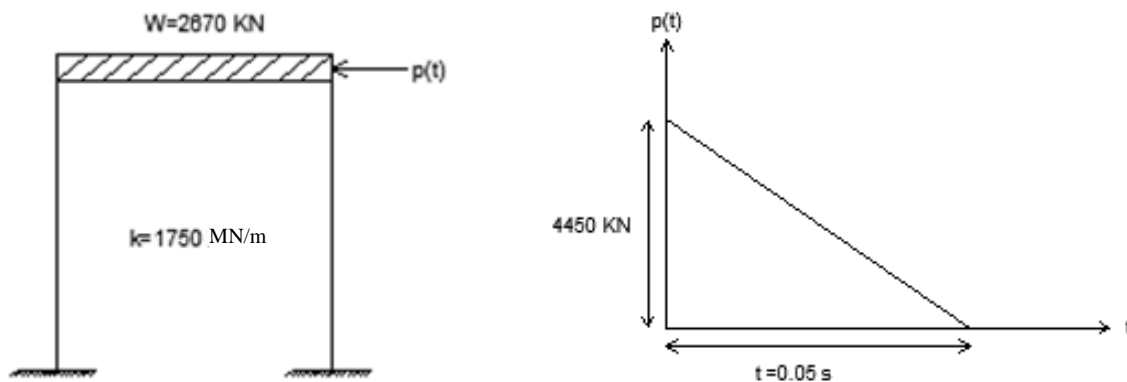


**Figure 4.7.2** Dynamic response of undamped SDF system to rectangular pulse force; static solution is shown by dashed lines.



**Figure 4.9.2** Dynamic response of undamped SDF system to triangular pulse force; static solution is shown by dashed lines.

**مثال:** ساختمان یک طبقه ای تحت اثر بار انفجار مطابق شکل زیر قرار می گیرد. با استفاده از طیف ضربه، نیروی عکس العمل حداکثر را در پایه ساختمان محاسبه کنید.



**حل:** پریود ارتعاشی سازه از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2670 \times 10^3}{1750 \times 10^6 \times 9.81}} = 0.079 \text{ s}$$

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0.05}{0.079} = 0.63$$

با توجه به طیف ضربه، ضریب بزرگنمایی دینامیکی  $D=1.33$  است، لذا:

$$u_{\max} = D \frac{p_0}{k} = 1.33 \frac{4450 \times 10^3}{1750 \times 10^6} = 0.0034 \text{ m} = 3.4 \text{ mm}$$

حداکثر نیرو در پای سازه برابر خواهد بود با:

$$f_{s,\max} = k u_{\max} = 1750 \times 10^6 (0.0034) = 5950000 \text{ N} = 5950 \text{ KN}$$

اگر زمان تداوم ضربه فشار انفجار، فقط یک دهم این مقدار می بود ( $t_1=0.005 \text{ s}$ )، ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای این نسبت ( $t_1/T=0.063$ ) برابر  $D=0.2$  بدست می آمد، و لذا نیروی مقاوم ارتجاعی  $f_s=894 \text{ KN}$  می بود. بنابراین برای یک بار ضربه ای کوتاه مدت، قسمت عمده بار اعمالی توسط اینرسی سازه مقابله می شود و تنشهای ایجاد شده خیلی کوچکتر از تنشهای مربوط به بار طولانی تر خواهد بود. همانطور که ملاحظه می شود در حالت دوم زمان  $t_1$  بسیار کوتاه است و سازه در این فاصله نمی تواند از خود عکس العملی نشان دهد که باعث ایجاد تغییرمکانهای بزرگ شود و چون مقدار زیادی از نیروی وارد توسط اینرسی سازه جذب می شود لذا نیروی ایجاد شده در پای ساختمان نسبت به حالت اولیه خیلی کمتر است.



# روش تقریبی تحلیل واکنش تحت اثر نیروهای ضربه‌ای کوتاه مدت

■ ملاحظه شد که واکنش سازه‌ها در برابر بارهای ضربه‌ای در دو فاز تعیین می‌گردد.

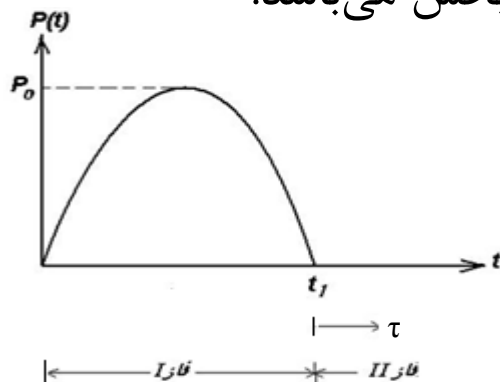
■ اگر مدت زمانی که نیرو اعمال می‌شود بحد کافی طولانی بوده بطوری که سازه فرصت نشان دادن

عکس‌العمل را داشته باشد ( $t_1/T > 1$ )، در این صورت تغییرمکان حداکثر در فاز نخست اتفاق می‌افتد.

■ ولی اگر  $t_1$  آنقدر کوچک باشد ( $t_1/T < 1/4$ ) که جواب حداکثر در فاز دوم (ارتعاش آزاد) بوجود آید، در

اینصورت معمولاً تغییرمکان سازه در فاز اول قابل ملاحظه نبوده و بنابراین می‌توان از آن بطور کلی

صرف‌نظر نمود که این نکته، اساس روش تقریبی مورد بحث در این بخش می‌باشد.



# روش تقریبی تحلیل واکنش تحت اثر نیروهای ضربه‌ای کوتاه مدت

در این روش صرفاً به معادله حرکت در مرحله ارتعاش آزاد با شرایط اولیه (فقط سرعت، چون از تغییر مکان صرف‌نظر شده است) در لحظه  $t_1$  اکتفا می‌شود. به منظور تعیین سرعت در لحظه  $t_1$  می‌توان از روشهایی نظیر تساوی ضربه-اندازه حرکت و یا قانون دوم نیوتن استفاده نمود.

از تساوی ضربه - اندازه حرکت در فاصله زمانی فاز I خواهیم داشت :

$$m\Delta\dot{u} = \int_0^{t_1} p(t)dt$$

با توجه به شرایط اولیه در لحظه صفر (سکون) رابطه فوق بصورت زیر ساده می‌شود:

$$m\dot{u}(t_1) = \int_0^{t_1} p(t)dt$$

و در نهایت سرعت در لحظه  $t_1$  محاسبه می‌گردد:

$$\dot{u}(t_1) = \frac{\int_0^{t_1} p(t)dt}{m}$$



# روش تقریبی تحلیل واکنش تحت اثر نیروهای ضربه‌ای کوتاه مدت

اگر سیستم بدون میرایی فرض شود پاسخ ارتعاش آزاد فاز II بصورت زیر خواهد بود:

$$u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t}$$

که در آن  $\bar{t} = t - t_1$  است، باتوجه به ناچیز بودن تغییر مکان در فاز اول ( $u(t_1) = 0$ ) و با توجه به مقدار سرعت از رابطه  $\star$  می توان از رابطه تقریبی زیر برای تعیین واکنش سازه تحت اثر نیروهای ضربه ای کوتاه مدت استفاده کرد:

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega} \left( \int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t} \quad (i)$$

## روش تقریبی تحلیل واکنش تحت اثر نیروهای ضربه‌ای کوتاه مدت

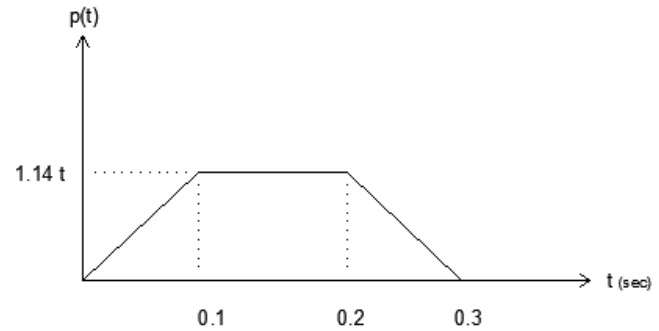
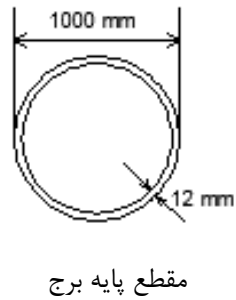
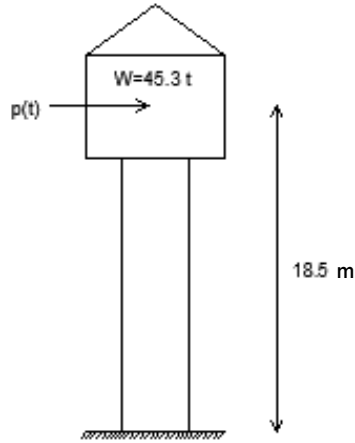
اگر سیستم با میرایی فرض شود پاسخ ارتعاش آزاد فاز II بصورت زیر خواهد بود:

$$u(\bar{t}) = e^{-\xi\omega\bar{t}} \left( \frac{\dot{u}(t_1) + \xi\omega u(t_1)}{\omega_D} \sin \omega_D \bar{t} + u(t_1) \cos \omega_D \bar{t} \right)$$

و در نتیجه پس از اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$u(\bar{t}) = \frac{e^{-\xi\omega\bar{t}}}{m\omega_D} \left( \int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega_D \bar{t} \quad (\text{ii})$$

**مثال:** برج آبی با مشخصات نشان داده شده تحت موج انفجار با بارگذاری مطابق شکل قرار می گیرد. رفتار برج را تجزیه و تحلیل نمایید. ( $E=2.1 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ )



**حل:**

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

$$I = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4} [50.0^4 - 48.8^4] = 454544 \text{ cm}^4$$

$$k = \frac{3 \times 2.1 \times 10^6 \times 454544}{(1850)^3} = 452 \text{ kgf / cm}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{w}{k \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{45300}{452 \times 981}} = 2 \text{ sec}$$

با توجه به اینکه  $t_1/T = 0.3/2 = 0.15 < 1/4$  بنابراین با دقت کافی می توان از روش تقریبی جهت حل استفاده کرد ، رابطه تغییرمکان در این حالت به استفاده از رابطه زیر عبارت است از:

$$u(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega} \left( \int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t} = \frac{1}{\left(\frac{45800}{981}\right) \left(\frac{2\pi}{2}\right)} (0.228 \times 1000) \sin \omega \bar{t} = 1.57 \sin \omega \bar{t}$$

بنابراین حداکثر جابجایی به ازای  $\sin \omega \bar{t} = 1$  بدست می آید:  $u_{\max} = 1.57 \text{ cm}$

و حداکثر نیروی برشی در پای برج برابر است با:

$$f_{s,\max} = k u_{\max} = 452 \times 1.57 = 710 \text{ kgf}$$

# فصل سوم

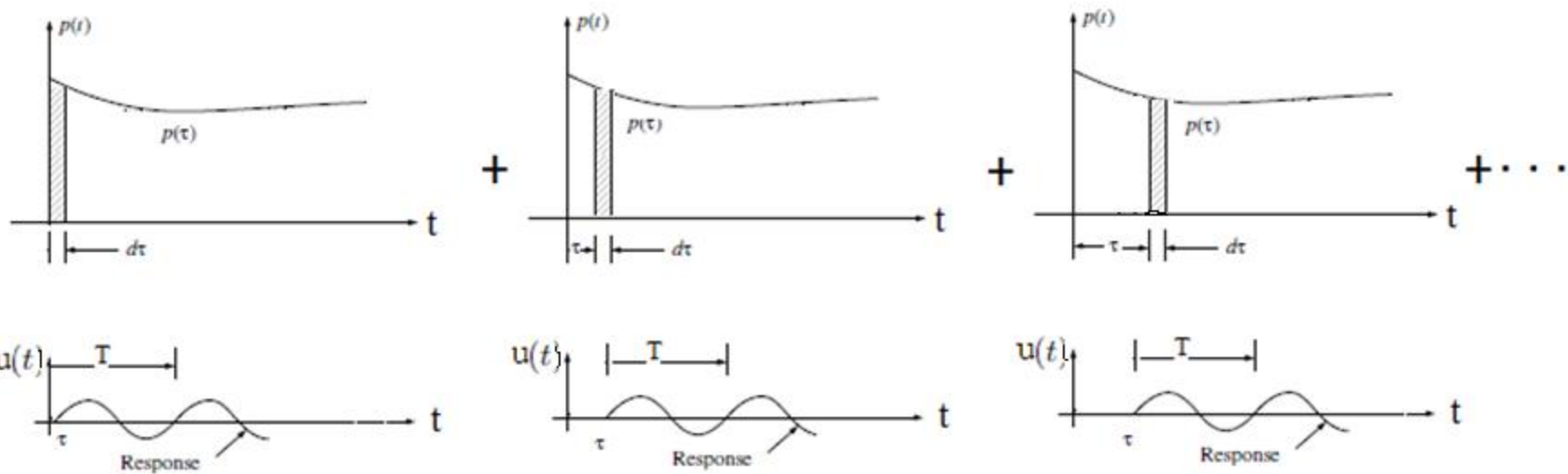
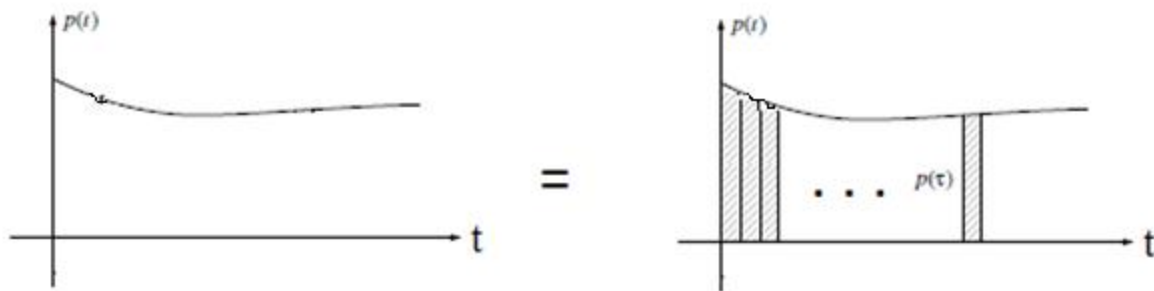
## ارتعاش اجباری

### قسمت چهارم: بارگذاری کلی

# پاسخ نسبت به بارگذاری دینامیکی کلی - روش انتگرال دیوهامل

2

هر بارگذاری دلخواهی را می توان به صورت مجموعه ای از بارهای ضربه ای کوتاه مدت در نظر گرفت:





# پاسخ نسبت به بارگذاری دینامیکی کلی-روش انتگرال دیوهامل

الف) اگر سیستم بدون میرایی باشد:

پاسخ به هر یک از این اجزاء بار را می توان مطابق رابطه (i) بخش قبل محاسبه کرد:

$$du(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad ; t > \tau$$

با استفاده از اصل جمع آثار قوا Superposition تغییرمکان کل ناشی از بارگذاری دلخواه، برابر مجموع تغییرمکان های ناشی از ضربه های کوتاه مدت خواهد بود.

$$u(t) = \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

رابطه انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی  
(Duhamel's Integral)

# پاسخ نسبت به بارگذاری دینامیکی کلی\_ روش انتگرال دیوهامل

(ب) اگر سیستم دارای میرایی باشد:

پاسخ به هر یک از این اجزاء بار را می توان مطابق رابطه (ii) محاسبه کرد:

$$du(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) ; t > \tau$$

با استفاده از اصل جمع آثار قوا Superposition تغییرمکان کل ناشی از بارگذاری دلخواه، برابر مجموع تغییرمکان های ناشی از این ضربه های کوتاه مدت خواهد بود:

$$u(t) = \int_0^t \frac{p(\tau)}{m\omega} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau$$

رابطه انتگرال دیوهامل برای سیستم های با میرایی  
(Duhamel's Integral)

# پاسخ نسبت به بارگذاری دینامیکی کلی - روش انتگرال دیوهامل

- با استفاده از انتگرال دیوهامل می‌توان جواب بسته فرمی (closed form solution) برای هر نوع بارگذاری دلخواه بدست آورد.
- البته لازم به تذکر است که در بارگذاری‌های دلخواه نظیر بار زلزله، همیشه امکان حل بسته فرم وجود نداشته و باید با استفاده از روش‌های عددی (نظیر جمع بندی ساده، قاعده ذوزنقه، قاعده سیمپسون) پاسخ سیستم را تعیین کرد.
- در تعیین رابطه انتگرال دیوهامل از اصل جمع آثار قوا استفاده شده است که فقط در مورد سازه‌های خطی (رابطه خطی تنش-کرنش و کوچک بودن تغییرشکل‌ها) قابل استفاده می‌باشد.

## اثر شرایط اولیه

- در بدست آوردن رابطه انتگرال دیوهامل بطور ضمنی فرض شده است که بارگذاری از لحظه  $t=0$  شروع شده و سازه در آن لحظه در حال سکون باشد.
- در شرایط اولیه دیگر  $u(0) \neq 0$  و  $\dot{u}(0) \neq 0$  واکنش ارتعاش آزاد نیز باید به این معادله اضافه شود.

# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

رابطه انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی به صورت زیر می باشد:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

در بسیاری از موارد نظیر بارگذاری زلزله، مشخصات بارگذاری بنحوی است که محاسبه انتگرال دیوهامل به صورت تحلیلی ناممکن می باشد، در این صورت باید از روش های عددی برای محاسبه پاسخ استفاده کرد.

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) (\sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau) d\tau$$

$$u(t) = \sin \omega t \cdot \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \cdot \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

$$u(t) = A(t) \sin \omega t - B(t) \cos \omega t \quad (i)$$

که در آن:

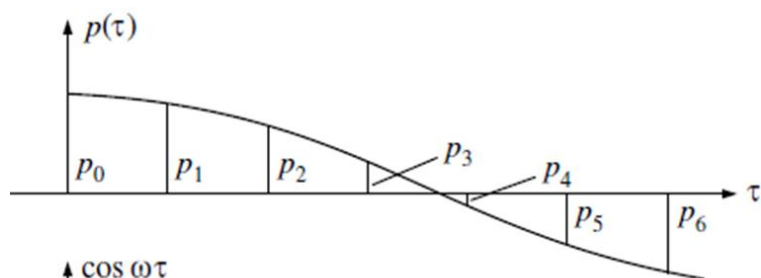
$$\begin{cases} A(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ B(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau \end{cases} \quad (ii)$$

# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

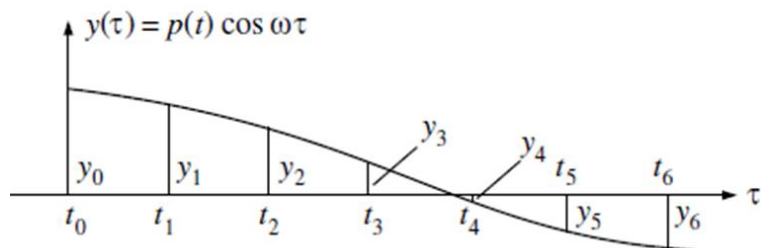
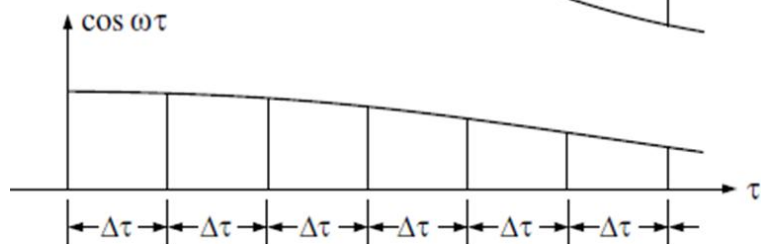
7

بنابراین انتگرال گیری عددی از انتگرال دیوهامل ایجاب می کند که انتگرال های  $A(t)$  و  $B(t)$  بطور عددی محاسبه شوند.

در ادامه به عنوان نمونه محاسبه انتگرال  $A(t)$  یعنی عبارت  $\int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau$  تشریح می گردد.



ابتدا مقدار تابع  $y(\tau) = P(\tau) \cos \omega \tau$  در فواصل مساوی  $\Delta\tau$  محاسبه می شود:



# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

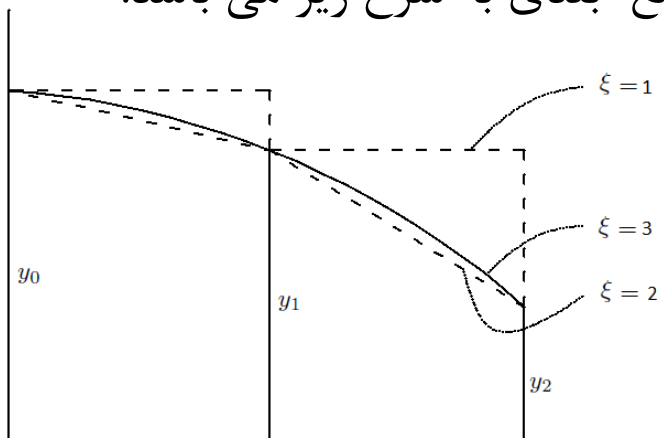
مقدار انتگرال با تبدیل به صورت جمع یک سری جملات تقریبی مناسب و به شکل ریاضی زیر نوشته می شود:

$$A(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^A(t) \quad (iii)$$

که در آن:

$$y(\tau) = p(\tau) \cos \omega\tau$$

$\frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^A(t)$  بیانگر جمع بندی عددی می باشد که فرم خاص آن به درجه تقریب بکار رفته بستگی دارد در سه حالت مختلف رایج در محاسبات عددی، عملیات جمع بندی به شرح زیر می باشد:



# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

9

□ روش جمع بندی ساده ( $\zeta=1$ ):

$$\sum_1^A (t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \quad (iv - a)$$

□ روش قاعده ذوزنقه ای ( $\zeta=2$ ):

$$\sum_2^A (t) = y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n \quad (iv - b)$$

□ روش قاعده سیمپسون ( $\zeta=3$ ):

$$\sum_1^A (t) = y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{n-1} + y_n \quad (iv - c)$$

که  $n=t/\Delta\tau$  بوده و در قاعده سیمپسون باید عددی زوج در نظر گرفته شود.

# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

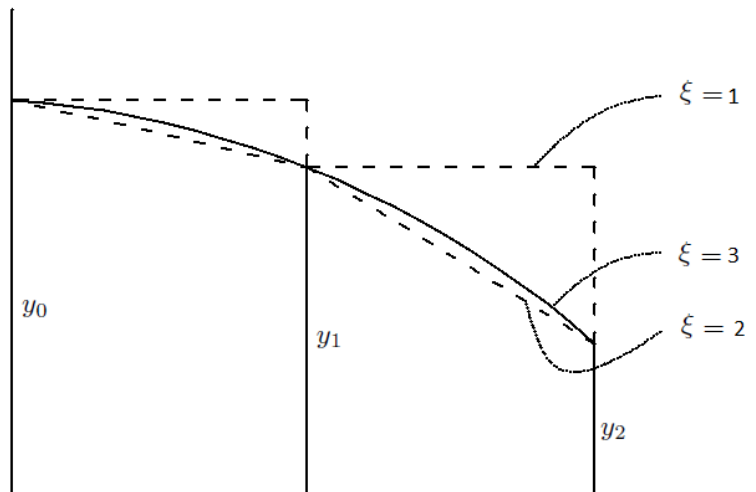
■ با استفاده از هر کدام از روابط اخیر در رابطه (iii) مقدار تقریبی انتگرال در لحظه خاص مورد نظر  $t$  بدست می آید.

■ میزان دقت محاسبات بستگی به فواصل زمانی  $\Delta\tau$  بکار رفته دارد.

■ بطور سر انگشتی هرگاه  $\Delta\tau \leq T/10$  باشد نتایج رضایت بخشی حاصل می شود.

■ دقت و حجم عملیات محاسباتی، با بالا رفتن درجه روش جمع بندی ( $\xi$ ) افزایش می یابد.

■ بعنوان یک قاعده کلی، استفاده از روش سیمپسون بخاطر دقت زیاد آن علیرغم پیچیدگی بیشتر در محاسبات، منطقی تر است.





# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

چون در عمل، تعیین جواب سیستم در یک لحظه خاص مورد نظر نبوده، بلکه تاریخچه جواب در لحظات مختلف  $(t_1, t_2, t_3, \dots)$  مد نظر می باشد، معادلات (iv) به شکل نموی زیر نوشته می شوند:

$$\sum_1^A(t) = \sum_1^A(t - \Delta\tau) + y_{n-1} \quad \square \text{ روش جمع بندی ساده } (\zeta=1):$$

$$\sum_1^A(t) = \sum_1^A(t - \Delta\tau) + p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) \quad (v-a)$$

$\square$  روش قاعده دوزنقه ای  $(\zeta=2)$  :

$$\sum_2^A(t) = \sum_2^A(t - \Delta\tau) + (y_{n-1} + y_n)$$

$$\sum_2^A(t) = \sum_2^A(t - \Delta\tau) + [p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t] \quad (v-b)$$

$\square$  روش قاعده سیمپسون  $(\zeta=3)$  :

$$\sum_3^A(t) = \sum_3^A(t - 2\Delta\tau) + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n$$

$$\sum_3^A(t) = \sum_3^A(t - 2\Delta\tau) + [p(t - 2\Delta\tau) \cos \omega(t - 2\Delta\tau) + 4p(t - \Delta\tau) \cos \omega(t - \Delta\tau) + p(t) \cos \omega t] \quad (v-c)$$

# محاسبه عددی انتگرال دیوهامل برای سیستم های بدون میرایی

که در روابط فوق  $\sum_{\zeta}^A (t - \Delta\tau)$  بیانگر مقدار حاصل جمع تا لحظه  $(t - \Delta\tau)$  می باشد.

برآورد عبارت  $B(t)$  نیز عینا همانند محاسبه  $A(t)$  انجام می گیرد:

$$B(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \sum_{\zeta}^B (t) \quad (vi)$$

که عبارت  $\sum_{\zeta}^B (t)$  مشابه روابط (v) بوده با این تفاوت که توابع سینوسی جایگزین توابع کسینوسی می شوند.

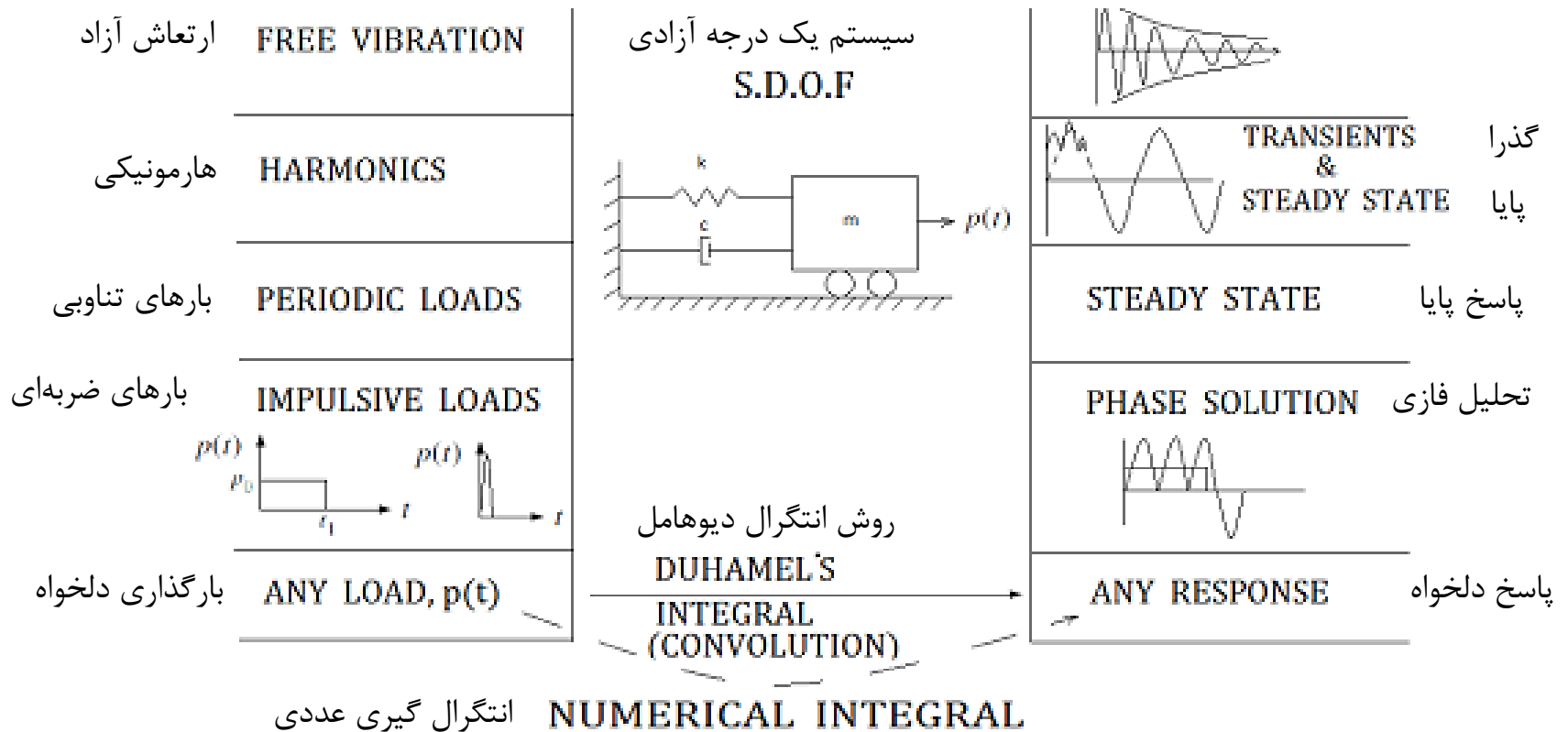
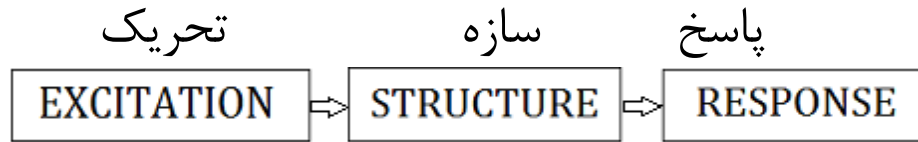
با جایگزین کردن روابط (iii) و (vi) در معادله (i)، رابطه نهایی برای محاسبه پاسخ سیستم بدون میرایی به شکل زیر بدست می آید:

$$u(t) = \frac{\Delta\tau}{m\omega} \frac{1}{\zeta} \left[ \sum_{\zeta}^A (t) \sin \omega t - \sum_{\zeta}^B (t) \cos \omega t \right]$$

# فصل چهارم

## روش های انتگرال گیری عددی

# مروری بر مطالب فصل های قبل



# محدودیت‌های روش انتگرال دیوهامل

- رفتار سیستم بصورت خطی فرض شود.
  - معادله کلی حرکت سیستم های غیر خطی به شکل کلی  $m\ddot{u} + f(u, \dot{u}, t) = p(t)$  بوده که در آن نیروی فنر و نیروی میرایی، به ترتیب با تغییر مکان و سرعت سیستم رابطه غیرخطی دارد. حل معادله فوق پیچیده و طولانی بوده و نیاز به کاربرد روشهای عددی دارد.
  - حل بسته فرم همیشه امکان پذیر نیست (مواردی نظیر بار زلزله)،
  - روشی کلی نیست (برای هر بارگذاری حل جداگانه‌ای لازم است و مقیاس پذیر نیست).
- روشهای انتگرال گیری عددی مسقیم (انتگرال گیری گام به گام) فاقد محدودیت های ذکر شده فوق می‌باشند و از این رو دارای ارجحیت می‌باشند.

# روشهای انتگرال گیری عددی مستقیم برای تحلیل دینامیکی سیستم های خطی و غیرخطی

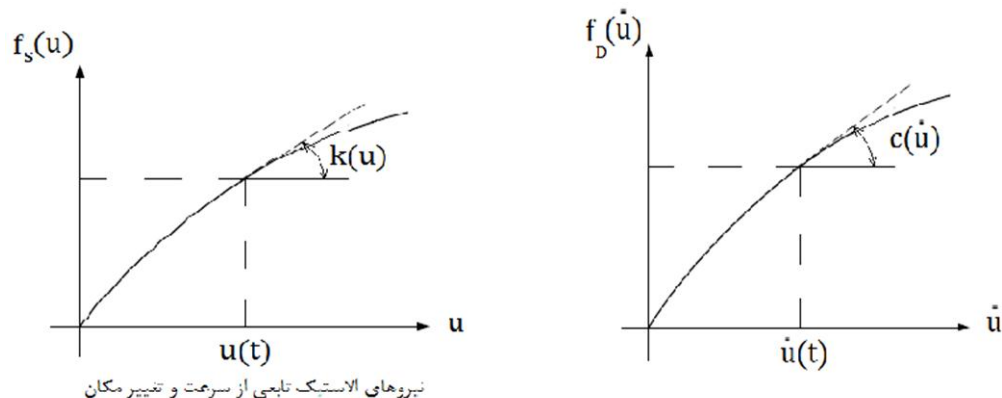
## Direct numerical Integration methods

4

■ ملاحظه شد روش انتگرال دیوهامل روش مناسبی برای تحلیل پاسخ سازه های خطی تحت انواع بارگذاریهای دینامیکی دلخواه است.

■ غیرخطی بودن رفتار سیستم می تواند ناشی از غیرخطی هندسی (تغییر شکل های بزرگ) و یا غیرخطی مصالح (عدم پیروی از قانون هوک) باشد مثلا تحت اثر زلزله های شدید سازه رفتار غیرخطی از خود نشان می دهد.

■ در سیستم های غیرخطی مشخصه های دینامیکی سیستم از قبیل خواص الاستیک و خواص میرایی در طول واکنش ثابت باقی نمی ماند.

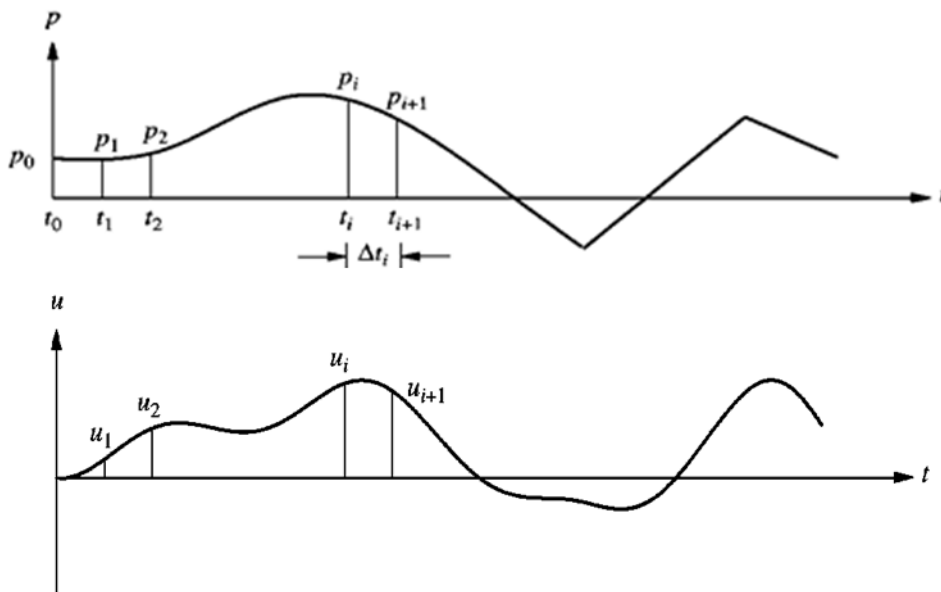


■ در صورتی که نیروی موثر تابع پیچیده ای از زمان بوده و یا سیستم غیرخطی باشد برای تحلیل دینامیکی سیستم می توان از روش های انتگرال گیری گام به گام (step by step integration) استفاده کرد.

# خلاصه مراحل روش انتگرال گیری گام به گام

5

- نیروی وارده در گامهای زمانی کوچکی (که برای سادگی متساوی در نظر گرفته می‌شوند) تعیین می‌گردد.
- هدف در روش‌های انتگرال‌گیری عددی، محاسبه پاسخ در لحظه  $t_{i+1}$  از روی پاسخ‌های قبلی به کمک فرمول‌های تقریبی است (با فرض خطی بودن رفتار در هر گام زمانی).



## خلاصه مراحل روش انتگرال گیری گام به گام

6

- مشخصه‌های دینامیکی سیستم در هر یک از این گام‌های زمانی ثابت فرض می‌شود (مطابق با مشخصه‌های لحظه شروع گام زمانی). خاصیت غیرخطی بودن سیستم با محاسبه مشخصه‌های جدید آن در حالت تغییرشکل یافته در اول هر گام زمانی، در تحلیل اعمال می‌شود.

$$k_i \cong \left( \frac{df_s}{du} \right)_{t=t_i} \quad c_i \cong \left( \frac{df_D}{d\dot{u}} \right)_{t=t_i}$$

- شرایط تعادل دینامیکی در ابتدا و انتهای هر گام زمانی اعمال شده و حرکت سیستم در طول این گام زمانی با در نظر گرفتن یک مکانیزم واکنش فرضی تعیین می‌گردد.
- محاسبه واکنش کل از طریق بکار بردن سرعت و تغییرمکان محاسبه شده در انتهای گام زمانی به عنوان شرایط اولیه گام زمانی بعدی صورت می‌گیرد.
- تکرار روند فوق تا هر زمان لازم،

نکته: به این ترتیب در روش انتگرال گیری گام به گام تحلیل رفتار سیستم غیرخطی بصورت تحلیل مجموعه‌ای از سیستم‌های خطی، که مشخصه‌های فیزیکی سختی و یا میرایی آنها به طور متوالی تغییر می‌یابد، صورت می‌گیرد.

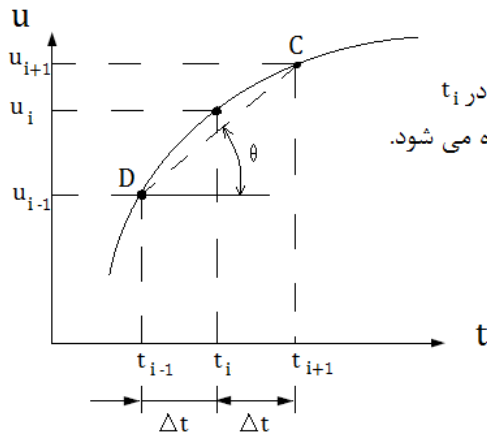
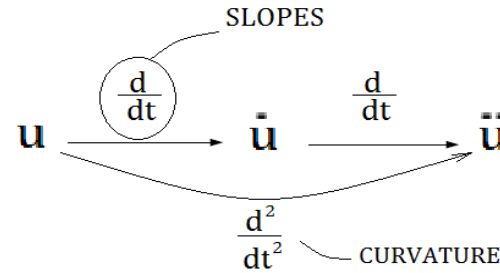


# مزایای روشهای انتگرال گیری عددی

- تقریبا در همه نرم افزارهای تحلیل سازه ها عملا از این روش ها استفاده می شود (شبیه سازی زلزله)
- قابل بکارگیری برای تحلیل سیستم های غیرخطی
- جامع (کلی)
- کامپیوتری

## CENTRAL DIFFERENCE METHOD

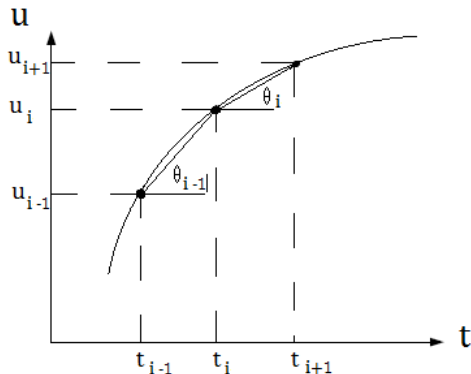
- در این روش از اصول تفاضلات محدود برای حل معادله دیفرانسیلی حرکت استفاده می‌شود.
- روش تفاضلات محدود روش عددی برای یافتن حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش معادله دیفرانسیل با یک معادله خطی (جبری) جایگزین می‌شود که حل آن عموماً از حل معادله دیفرانسیل ساده‌تر است.
- روش تفاضلات محدود بر این اصل استوار است که مشتقات تابع در یک نقطه را می‌توان با عبارتی جبری جایگزین کرد که شامل مقدار تابع در آن نقطه و چندین نقطه همجوار آن است.
- هر چه این نقاط نزدیکتر انتخاب شوند بین مشتقات و تقریب جبری آنها توافق بهتری حاصل می‌شود و نتایج تحلیل دقیق‌تر می‌شود ولی با افزایش تعداد این نقاط، همزمان باید معادلات جبری بیشتری را حل کرد.



تعیین سرعت در لحظه  $t_i$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \rightarrow \dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$$

تعیین شتاب در لحظه  $t_i$



$$\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \ddot{u}_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta t} = \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}$$

این انتخاب ها در مورد روابط محاسبه شیب بدین خاطر بوده است که عبارت نهایی  $\ddot{u}_i$  تنها تابعی از مقادیر  $u$  در نقطه  $i$  و دو نقطه مجاور آن باشد.

حال عبارات تقریبی به دست آمده برای سرعت و شتاب در معادله حرکت در لحظه  $t_i$  جایگذاری می‌شود:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i$$

$$m \left[ \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2} \right] + c \left[ \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \right] + k[u_i] = p_i$$

$$\overbrace{\left[ \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right]}^{\hat{k}} u_{i+1} = \overbrace{p_i - \left[ \frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[ k - \frac{2m}{(\Delta t^2)} \right] u_i}^{\hat{p}_i}$$

از تحلیل بدست می‌آید
معلوم
معلوم
معلوم
\*

$$\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i$$

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{k}_i}$$

**نکته:** در تحلیل های غیرخطی مقادیر  $k$  و  $c$  جداگانه برای هر نمو زمانی در ابتدای گام زمانی ( $k_i$  و  $c_i$ ) در نظر گرفته می‌شود.

ملاحظه می‌شود برای حل عددی در گام اول، داشتن مقادیر  $u_0$  و  $u_{-1}$  لازم است. لازم است شرایط اولیه بصورت زیر انتخاب گردد:

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2}$$

با حل دو رابطه فوق برای  $u_{-1}$  خواهیم داشت:

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0$$

$u_0$  و  $\dot{u}_0$  معلوم هستند و  $\ddot{u}_0$  نیز با نوشتن رابطه حرکت در زمان  $t=0$  بدست می‌آید.

$$m\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + ku_0 = p_0 \rightarrow \ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

حال با داشتن مقادیر  $u_0$  و  $u_{-1}$  می‌توان اقدام به محاسبه  $u_1$  از طریق رابطه \* نمود.

توجه: در یک سیستم غیرخطی مقادیر  $k$  و  $c$  در هر گام تحلیل بر اساس مقادیر  $u$  و  $\dot{u}$  در ابتدای گام زمانی می‌تواند تعیین گردد.  $(k(u_i), c(\dot{u}_i))$

شرط پایداری روش تفاضلات مرکزی:

$$\left( \frac{\Delta t}{T} < \frac{1}{\pi} \right)$$

بر این اساس گفته می شود این روش پایدار مشروط ( CONDITIONALLY STABLE SOLUTION ) است.

البته معمولاً از فواصل زمانی کوتاهتری در تحلیل استفاده می شود.

معمولاً برای حصول نتایجی با دقت قابل قبول  $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{10}$  در نظر گرفته می شود.

در تحلیل پاسخ سازه تحت تحریک زلزله حتی فواصل زمانی کوتاهتری (در حدود 0.01 تا 0.02 ثانیه) برای تعریف دقیق تر شتاب زمین  $\ddot{u}_g(t)$  لازم است استفاده شود.

در روش تفاضلات مرکزی جواب  $u_{i+1}$  با اعمال شرایط تعادل (معادله حرکت) در زمان  $t_i$  بدست می آید. چنین روشهایی در دینامیک، **روشهای صریح Explicit Methods** نامیده می شوند.

## خلاصه روابط روش تفاضلات مرکزی

13

$$\text{فرض} \left\{ \begin{aligned} \dot{u}_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} & \ddot{u}_i &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{معادله تعادل} \left\{ \left[ \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[ \frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[ k - \frac{2m}{(\Delta t^2)} \right] u_i \right.$$

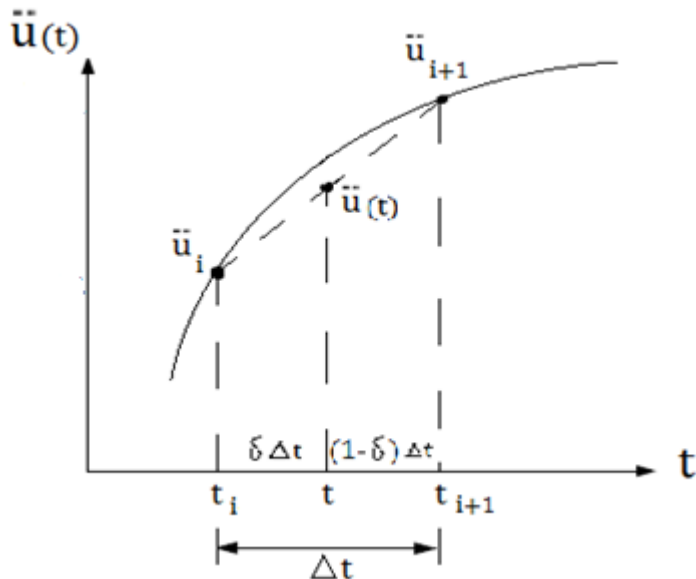
$$\text{شرایط اولیه} \left\{ \begin{aligned} u_{-1} &= u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_0 &= \frac{1}{m} (p_0 - c \dot{u}_0 - k u_0) \end{aligned} \right.$$

توجه شود که روش مزبور از نوع پایدار مشروط می باشد و شرط پایداری این روش  $\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$  است.

## NEWMARK'S METHOD

□ روش نیومارک جزء خانواده‌ای از روشهای انتگرال گیری است که بر پایه تمرکز بر شتاب استوار است.

□ با فرض اینکه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت ثابت، متوسط و یا خطی باشد روش نیومارک به سه دسته زیر تقسیم بندی می شود :



۱- روش شتاب ثابت (CONSTANT  $\dot{u}$ )

۲- روش شتاب میانگین (AVERAGE  $\dot{u}$ )

۳- روش شتاب خطی (LINEAR  $\dot{u}$ )



## NEWMARK'S METHOD

15

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_i + (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)\delta$$

□ شتاب در لحظه t:

$$\ddot{u}(t) = (1 - \delta)\ddot{u}_i + \delta\ddot{u}_{i+1}$$

□ سرعت در لحظه t:

$$\ddot{u}(t) = \frac{d\dot{u}(t)}{dt} \rightarrow \int_{\dot{u}_i}^{\dot{u}(t)} d\dot{u}(t) = \int_{t_i}^t \ddot{u}(t) dt$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \int_{t_i}^t \ddot{u}(t) dt$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \{(1 - \delta)\ddot{u}_i + \delta\ddot{u}_{i+1}\}(t - t_i)$$

در واقع ضریب  $\delta$  نشان دهنده وزن اثر شتابهای ابتدایی و انتهایی در تغییر سرعت است.

## NEWMARK'S METHOD

16

□ تغییر مکان در لحظه  $t$ :

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} \rightarrow \int_{u_i}^{u(t)} du(t) = \int_{t_i}^t \dot{u}(t) dt$$

$$u(t) = u_i + \int_{t_i}^t \dot{u}(t) dt$$

$$u(t) = u_i + \dot{u}_i(t - t_i) + \left\{ (1 - \delta)\ddot{u}_i + \delta\ddot{u}_{i+1} \right\} \frac{(t - t_i)^2}{2}$$

با فرض  $\beta = \frac{\delta}{2}$ :


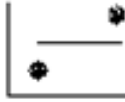
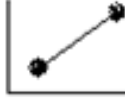
$$u(t) = u_i + \dot{u}_i(t - t_i) + \left\{ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_i + \beta \ddot{u}_{i+1} \right\} (t - t_i)^2$$

در واقع ضریب  $\beta$  نشان دهنده وزن اثر شتابهای ابتدایی و انتهایی در تغییر مقادیر تغییر مکان است.

## NEWMARK'S METHOD

17

بنابراین سه روش نیومارک با نمادهای  $\beta$  و  $\delta$  زیر مشخص خواهند شد :

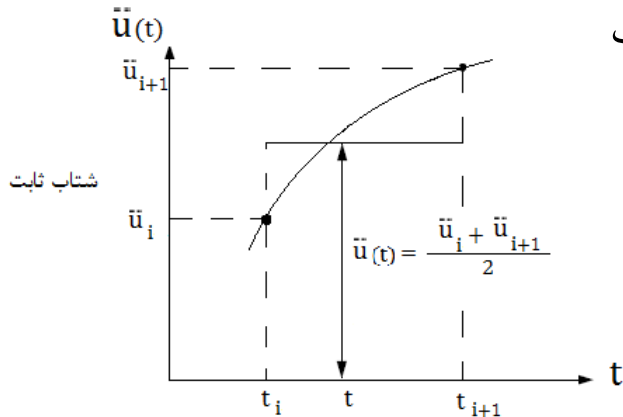
	$\beta$	$\delta$	
روش شتاب ثابت $\ddot{u}$	0	0	
روش شتاب متوسط $\ddot{u}$	1/4	1/2	
روش شتاب خطی $\ddot{u}$	1/6	1/2	

با توجه به اینکه نتایج روش شتاب ثابت نیومارک غیرقابل اعتماد است در ادامه صرفاً به بررسی دو روش شتاب متوسط و شتاب خطی نیومارک پرداخته می‌شود.

# روش شتاب میانگین نیومارک ( $\delta=1/2$ و $\beta=1/4$ )

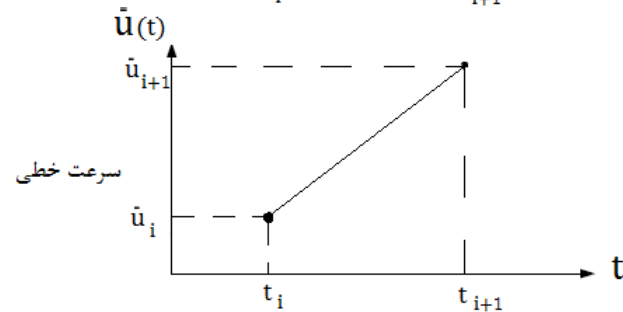
## CONSTANT ACCELERATION METHOD

در این روش شتاب در هر گام زمانی ثابت و برابر با مقدار میانگین شتاب لحظات ابتدایی و انتهایی گام مزبور فرض می شود:



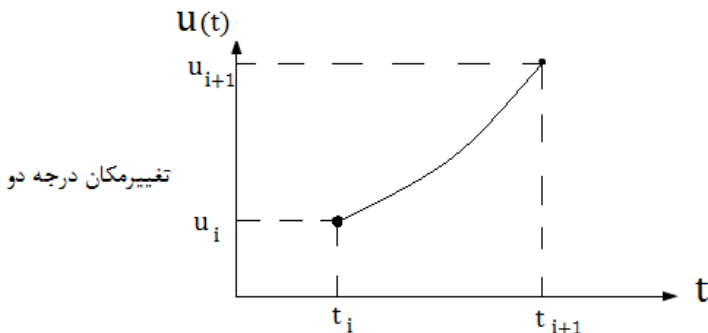
$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{2} \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \ddot{u}_{i+1}$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d\dot{u}(t)}{dt} \rightarrow \int_{\dot{u}_i}^{\dot{u}(t)} d\dot{u}(t) = \int_{t_i}^t \ddot{u}(t) dt$$



$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \left\{ \frac{1}{2} \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \ddot{u}_{i+1} \right\} (t - t_i) \dots (i)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} \rightarrow \int_{u_i}^{u(t)} du(t) = \int_{t_i}^t \dot{u}(t) dt$$



$$u(t) = u_i + \dot{u}_i (t - t_i) + \left\{ \frac{1}{4} \ddot{u}_i + \frac{1}{4} \ddot{u}_{i+1} \right\} (t - t_i)^2 \dots (ii)$$

# روش شتاب میانگین نیومارک ( $\beta=1/4$ و $\delta=1/2$ )

## CONSTANT ACCELERATION METHOD

19

با فرض  $t = t_{i+1}$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t = t_{i+1} \text{ به ازای رابطه (ii)} \rightarrow u(t_{i+1}) = u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{4} \ddot{u}_i \Delta t^2 + \frac{1}{4} \ddot{u}_{i+1} \Delta t^2 \dots (a)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \left\{ u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i \Delta t - \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{4} \right\} \quad EQ3$$

$$t = t_{i+1} \text{ به ازای رابطه (i)} \rightarrow \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left\{ \frac{1}{2} \ddot{u}_i + \frac{1}{2} \ddot{u}_{i+1} \right\} \Delta t \dots (b)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{4}{\Delta t^2} \left( u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i \Delta t - \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{4} \right) \right\}$$

به کمک رابطه EQ3 :

$$\dot{u}_{i+1} = -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \quad EQ2$$

# روش شتاب میانگین نیومارک ( $\beta = 1/4$ و $\delta = 1/2$ )

## CONSTANT ACCELERATION METHOD

20

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

به کمک روابط EQ2 و EQ3 :

$$\frac{4m}{\Delta t^2} \left\{ u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i \Delta t - \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{4} \right\} + c \left\{ -\dot{u}_i + \frac{2}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \right\} + ku_{i+1} = p_{i+1}$$

$$\left[ \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} + K \right] u_{i+1} = p_{i+1} + \frac{m}{\Delta t^2} [4u_i + 4\dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \Delta t^2] + \frac{c}{\Delta t} [2u_i + \dot{u}_i \Delta t] \quad EQ1$$

مراحل تحلیل به روش شتاب میانگین:

(1) محاسبه  $u_{i+1}$  به کمک معادله EQ1 با  $u_i$  و  $\dot{u}_i$  و  $\ddot{u}_i$  و  $p_{i+1}$  معلوم

(2) محاسبه  $\dot{u}_{i+1}$  به کمک معادله EQ2 با  $u_i$  و  $u_{i+1}$  و  $\dot{u}_i$  معلوم

(3) محاسبه  $\ddot{u}_{i+1}$  به کمک معادله EQ3 با  $u_i$  و  $u_{i+1}$  و  $\dot{u}_i$  و  $\ddot{u}_i$  معلوم

# روش شتاب میانگین نیومارک ( $\beta = 1/4$ و $\delta = 1/2$ )

## CONSTANT ACCELERATION METHOD

21

روش شتاب میانگین روشی از نوع پایدار نامشروط UNCONDITIONALLY STABLE است

یعنی شرط پایداری این روش عبارتست از:

$$\frac{\Delta t}{T} < \infty$$

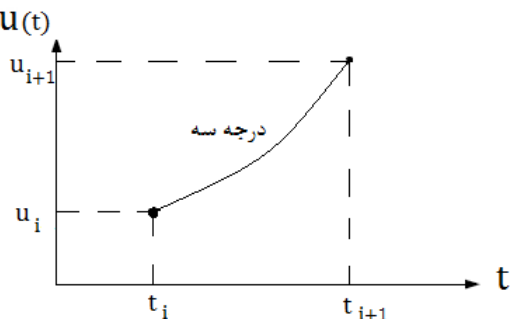
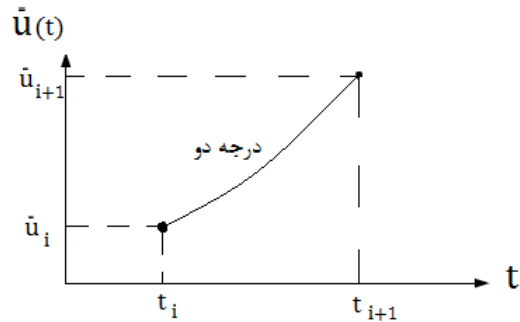
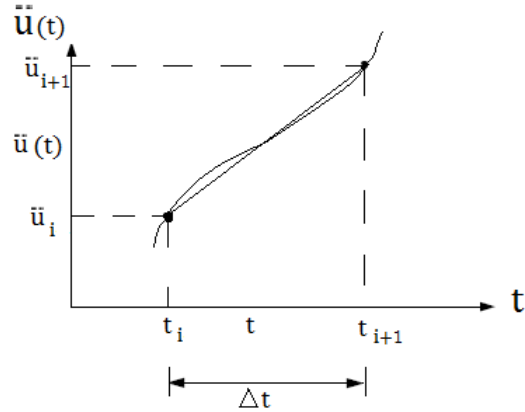
در روش های نیومارک پاسخ تغییر مکان در هر لحظه ( $t_{i+1}$ ) با اعمال شرایط تعادل (معادله حرکت)

در همان لحظه ( $t_{i+1}$ ) بدست می آید. چنین روش هایی را روش های ضمنی **Implicit Methods** گویند.

# روش شتاب خطی نیومارک ( $\delta=1/2$ و $\beta=1/6$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

22



در این روش تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت خطی فرض می شود:

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_i + \frac{t - t_i}{\Delta t} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\ddot{u}(t) = \frac{d\dot{u}(t)}{dt} \rightarrow \int_{\dot{u}_i}^{\dot{u}(t)} d\dot{u}(t) = \int_{t_i}^t \ddot{u}(t) dt$$

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_i + \int_{t_i}^t \ddot{u}(t) dt = \dot{u}_i + \ddot{u}_i (t - t_i) + \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{(t - t_i)^2}{2} \dots (i)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} \rightarrow \int_{u_i}^{u(t)} du(t) = \int_{t_i}^t \dot{u}(t) dt$$

$$u(t) = u_i + \int_{t_i}^t \dot{u}(t) dt = u_i + \dot{u}_i (t - t_i) + \ddot{u}_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{2\Delta t} \frac{(t - t_i)^3}{3} \dots (ii)$$



# روش شتاب خطی نیومارک ( $\delta=1/2$ و $\beta=1/6$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

23

با فرض  $t = t_{i+1}$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$t = t_{i+1} \text{ به ازای (ii) رابطه} \rightarrow u(t_{i+1}) = u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{4} + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{u}_{i+1} - \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{u}_i \quad (a)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2} \left\{ u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i \Delta t - \ddot{u}_i \frac{\Delta t^2}{3} \right\} \quad EQ3$$

$$t = t_{i+1} \text{ به ازای (i) رابطه} \rightarrow \dot{u}(t_{i+1}) = \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \Delta t + \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i \quad (b)$$

$$\dot{u}_{i+1} = -\ddot{u}_i \frac{\Delta t}{2} - 2\ddot{u}_i + \frac{3}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i) \quad EQ2$$

به کمک رابطه EQ3 :

# روش شتاب خطی نیومارک ( $\beta = 1/6$ و $\delta = 1/2$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

24

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p_{i+1} \xrightarrow{EQ3, EQ2}$$

$$\left[ \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + k \right] u_{i+1} = p_{i+1} + \frac{m}{\Delta t^2} \left[ 6u_i + 6\dot{u}_i \Delta t + 2\ddot{u}_i (\Delta t)^2 \right] + \frac{c}{\Delta t} \left[ 3u_i + 2\dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i \right] \quad EQ1$$

مراحل تحلیل به روش شتاب خطی:

(1) محاسبه  $u_{i+1}$  به کمک معادله EQ1 با  $u_i$  و  $\dot{u}_i$  و  $\ddot{u}_i$  و  $p_{i+1}$  معلوم

(2) محاسبه  $\dot{u}_{i+1}$  به کمک معادله EQ2 با  $u_i$  و  $\dot{u}_i$  و  $\ddot{u}_i$  و  $u_{i+1}$  معلوم

(3) محاسبه  $\ddot{u}_{i+1}$  به کمک معادله EQ3 با  $u_i$  و  $\dot{u}_i$  و  $\ddot{u}_i$  و  $u_{i+1}$  معلوم

# روش شتاب خطی نیومارک ( $\beta=1/6$ و $\delta=1/2$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

25

1) HAVE  $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, p_{i+1}$  ; TO FIND  $u_{i+1}$  :

$$\left[ \frac{6m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} + K \right] u_{i+1} = p_{i+1} + \frac{m}{\Delta t^2} \left[ 6u_i + 6\dot{u}_i \Delta t + 2\ddot{u}_i (\Delta t)^2 \right] + \frac{c}{\Delta t} \left[ 3u_i + 2\dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i \right] \quad (EQ1)$$

2) WITH  $u_{i+1}$  ; FIND  $\dot{u}_{i+1}$  :

$$\text{(EQ2) از رابطه: } \dot{u}_{i+1} = -\frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_i - 2\dot{u}_i + \frac{3}{\Delta t} (u_{i+1} - u_i)$$

3) WITH  $u_{i+1}$  ; FIND  $\ddot{u}_{i+1}$  :

$$\text{(EQ3) از رابطه: } \ddot{u}_{i+1} = \left\{ u_{i+1} - u_i - \dot{u}_i \Delta t - \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{u}_i \right\} \frac{6}{\Delta t^2}$$

# روش شتاب خطی نیومارک ( $\delta=1/2$ و $\beta=1/6$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

26

شرط پایداری روش شتاب خطی نیومارک به صورت  $\frac{\Delta t}{T} < \frac{\sqrt{3}}{\pi}$  می باشد لذا روش مزبور از نوع پایدار مشروط *conditionally stable* است.

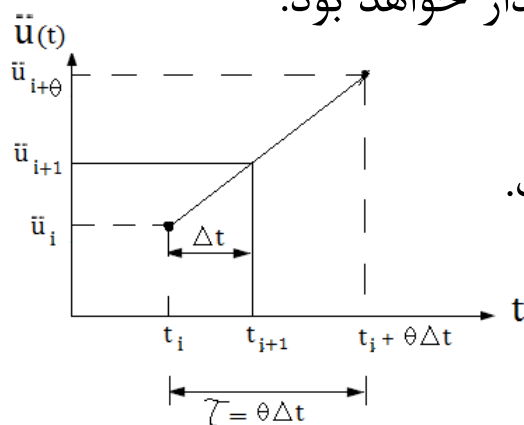
پایداری مشروط الزام کوچکتر گرفتن گامهای زمانی را در پی دارد که در بعضی موارد استفاده از روش را غیرممکن و غیرعملی می سازد، اصلاح ویلسون- $\theta$  تضمین کننده پایداری روش شتاب خطی بصورت نامشروط و مستقل از اندازه گام زمانی خواهد بود.

در روش ویلسون- $\theta$  پارامتر  $\Delta t$  با  $\theta\Delta t$  جایگزین می شود و فرض می شود شتاب در طول فاصله زمان گسترده تر  $\theta\Delta t$  بصورت خطی تغییر نماید.

اگر  $\theta > 1.37$  در نظر گرفته شود، روش ویلسون- $\theta$  بصورت نامشروط پایدار خواهد بود.

معمولاً  $\theta = 1.4$  در نظر گرفته می شود.

بدیهی است در نظر گرفتن  $\theta = 1$  به مفهوم اعمال روش شتاب خطی است.



# روش شتاب خطی نیومارک ( $\beta = 1/6$ و $\delta = 1/2$ )

## LINEAR ACCELERATION METHOD

27

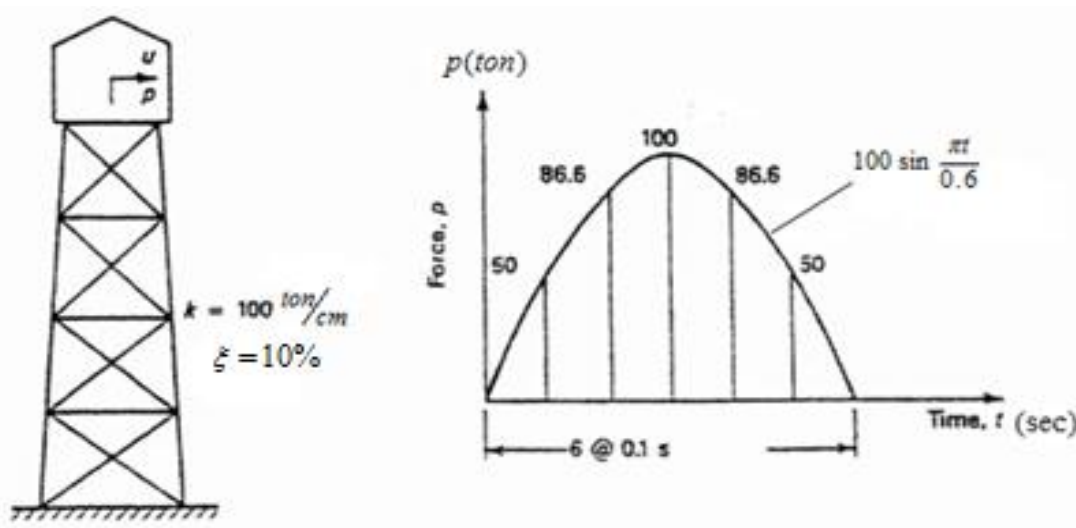
روابط نهایی مربوط به روش ویلسون- $\theta$  در زیر آورده شده است:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{i+\theta} = p_i(1-\theta) + \theta p_{i+1} \longrightarrow \text{بدست می آید } p_{i+\theta} \\ \left[ \frac{6m}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3c}{\theta\Delta t} + k \right] u_{i+\theta} = p_{i+\theta} + \frac{m}{(\theta\Delta t)^2} \left[ 6u_i + 6\dot{u}_i\theta\Delta t + 2\ddot{u}_i(\theta\Delta t)^2 \right] \\ + \frac{c}{\theta\Delta t} \left[ 3u_i + 2\dot{u}_i\theta\Delta t + \frac{(\theta\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i \right] \longrightarrow \text{بدست می آید } u_{i+\theta} \end{array} \right.$$

$$\ddot{u}_{i+\theta} = \left\{ u_{i+\theta} - u_i - \dot{u}_i\theta\Delta t - \ddot{u}_i \frac{(\theta\Delta t)^2}{3} \right\} \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \longrightarrow \text{بدست می آید } \ddot{u}_{i+\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\ddot{u}_{i+\theta} - \ddot{u}_i}{\theta} \\ \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \longrightarrow \text{تعیین } \ddot{u}_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, u_{i+1} \\ u_{i+1} = u_i + \Delta t\dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{3}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6}\ddot{u}_{i+1} \end{array} \right.$$

**مثال:** پاسخ برج زیر را که در معرض بار ضربه ای نیم سینوسی قرار دارد محاسبه کنید. برج در ابتدا به صورت ساکن فرض شود.



$$m = 2.533 \text{ tonf} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}$$

$$k = 100 \text{ tonf} / \text{cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2.533}} = 6.283 \text{ rad/sec} \rightarrow T = \frac{2\pi}{6.283} = 1.00 \text{ sec}$$

$$\xi = 10\%$$

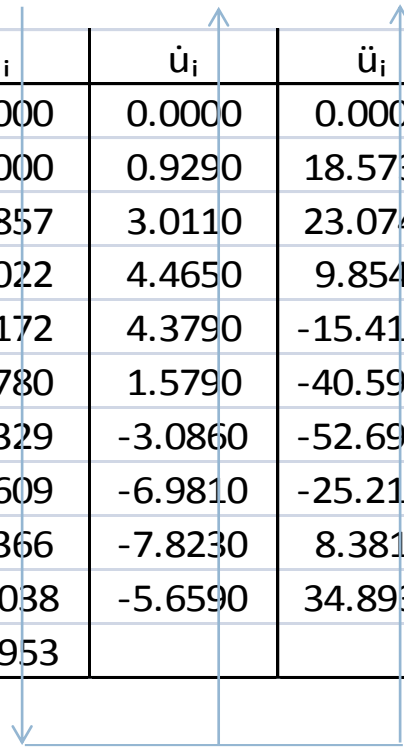
$$c = 2\xi\omega m = 3.183 \text{ tonf} \cdot \text{sec} / \text{cm}$$

# 1. Central Difference Method

$$269.21u_{i+1} = p_i + 406.6u_i - 237.39u_{i-1}$$

$$\dot{u}_i = 5(u_{i+1} - u_{i-1})$$

$$\ddot{u}_i = 100(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$



Time	$p_i$	$u_i$	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$	u (theoretical)
0.0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	50.0	0.0000	0.9290	18.5730	0.0323
0.2	86.6	0.1857	3.0110	23.0740	0.2254
0.3	100.0	0.6022	4.4650	9.8540	0.6240
0.4	86.6	1.1172	4.3790	-15.4180	1.0961
0.5	50.0	1.4780	1.5790	-40.5940	1.4251
0.6	0.0	1.4329	-3.0860	-52.6930	1.3772
0.7	0.0	0.8609	-6.9810	-25.2160	0.8683
0.8	0.0	0.0366	-7.8230	8.3810	0.1105
0.9	0.0	-0.7038	-5.6590	34.8930	-0.5974
1.0	0.0	-1.0953			-1.0073

## 2. Constant Acceleration Method

$$u_{j+1} = u_j + 0.1\dot{u}_j + 0.005\ddot{u}_j$$

$$\dot{u}_{j+1} = \dot{u}_j + 0.1\ddot{u}_j$$

$$\ddot{u}_{j+1} = \frac{1}{2.533}(p_{i+1} - 100u_i - 13.183\dot{u}_j - 0.8183\ddot{u}_j)$$

Time	$u_j$	$\dot{u}_j$	$\ddot{u}_j$	$p_{j+1}$	$u$ (theoretical)
0.0	0.0000	0.000	0.00	50.0	0.0000
0.1	<0.0000	0.000	19.74	86.6	0.0323
0.2	<0.0987	1.974	27.81	100.0	0.2254
0.3	<0.4351	4.755	16.32	86.6	0.6240
0.4	0.9923	6.384	-13.01	50.0	1.0961
0.5	1.5660	5.086	-48.47	0.0	1.4251
0.6	1.8320	0.239	-72.63	0.0	1.3772
0.7	1.4930	-7.024	-50.11	0.0	0.8683
0.8	0.5400	-12.036	-6.19	0.0	0.1105
0.9	-0.6950	-12.655	43.33	0.0	-0.5974
1.0	-1.7430	-8.322	79.29		-1.0073



### 3. Average-Acceleration Method

$$1176.9u_{i+1} = p_{i+1} + 1076.9u_i - 104.5\dot{u}_i + 2.533\ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = 20(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 400(u_{i+1} - u_i) - 40\dot{u}_i - \ddot{u}_i$$

Time	u <sub>i</sub>	$\dot{u}_i$	$\ddot{u}_i$	p <sub>i+1</sub>	u (theoretical)
0.0	0.0000	0.000	0.000	50.0	0.0000
0.1	0.0425	0.850	16.994	86.6	0.0323
0.2	0.2245	2.790	21.816	100.0	0.2254
0.3	0.5851	4.422	10.815	86.6	0.6240
0.4	1.0248	4.374	-11.779	50.0	1.0961
0.5	1.3432	1.994	-35.806	0.0	1.4251
0.6	1.3291	-2.277	-49.613	0.0	1.3772
0.7	0.9073	-6.161	-28.066	0.0	0.8683
0.8	0.2227	-7.530	0.686	0.0	0.1105
0.9	-0.4633	-6.191	26.089	0.0	-0.5974
1.0	-0.9175	-2.893	39.871		-1.0073

## 4. Linear-Acceleration Method

$$1715.3u_{i+1} = p_{i+1} + 1615.3u_j + 158.35\dot{u}_i + 5.225\ddot{u}_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = 30(u_{i+1} - u_i) - 2\dot{u}_i - 0.05\ddot{u}_j$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 600(u_{i+1} - u_i) - 60\dot{u}_i - 2\ddot{u}_i$$

Time	$u_j$	$\dot{u}_j$	$\ddot{u}_j$	$p_{j+1}$	u (theorical)
0.0	0.0000	0.000	0.000	50.0	0.0000
0.1	0.0291	0.875	17.490	86.6	0.0323
0.2	0.2119	2.860	22.227	100.0	0.2254
0.3	0.5896	4.449	10.549	86.6	0.6240
0.4	1.0532	4.382	-12.893	50.0	1.0961
0.5	1.3862	1.871	-37.331	0.0	1.4251
0.6	1.3644	-2.530	-50.680	0.0	1.3772
0.7	0.8969	-6.430	-27.328	0.0	0.8683
0.8	0.1678	-7.648	2.981	0.0	0.1105
0.9	-0.5389	-6.055	28.875	0.0	-0.5974
1.0	-0.9785	-2.521	41.789		-1.0073

## 5. wilson- $\theta$ Method ( $\theta=1.5$ )

$$839.13u_{j+\theta} = p_{j+\theta} + 739.13u_j + 107.69\dot{u}_j + 5.305\ddot{u}_j$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 266.7(u_{j+\theta} - u_j) - 40\dot{u}_j - 2\ddot{u}_j$$

$$\ddot{u}_{i+1} = 0.667\ddot{u}_{j+\theta} + 0.333\ddot{u}_j$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_j + 0.05(\ddot{u}_j + \ddot{u}_{j+1})$$

$$u_{i+1} = u_j + 0.1\dot{u}_j + 0.0033\ddot{u}_j + 0.00167\ddot{u}_{j+1}$$

Time	$u_j$	$\dot{u}_j$	$\ddot{u}_j$	$p_{j+\theta}$	$u_{j+\theta}$	$\ddot{u}_{j+\theta}$	u(theoretical)
0.0	0.0000	0.000	0.00	75.0	0.0894	23.837	0.0000
0.1	0.0265	0.795	15.89	104.9	0.3508	22.923	0.0323
0.2	0.1932	2.618	20.58	106.7	0.7634	6.197	0.2254
0.3	0.5419	4.197	10.99	79.9	1.1806	-19.507	0.6240
0.4	0.9827	4.279	-9.34	31.7	1.3934	-42.927	1.0961
0.5	1.3265	2.225	-31.73	-25.0	1.2237	-52.993	1.4251
0.6	1.3668	-1.656	-45.91	0.0	0.7011	-19.467	1.3772
0.7	1.0010	-5.366	-28.28	0.0	0.0143	8.039	0.8683
0.8	0.3634	-6.983	-4.07	0.0	-0.6018	30.041	0.1105
0.9	-0.3174	-6.253	18.67	0.0	-0.9640	40.323	-0.5974
1.0	-0.8252	-3.664	33.11				-1.0073

# شکل کلی روابط پیشنهادی نیومارک برای سرعت و تغییر مکان

34

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1 - \delta)\Delta t \ddot{u}_i + \delta \Delta t \ddot{u}_{i+1}$$

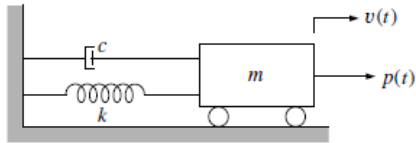
$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1}$$

ضریب  $\delta$  وزن اثر شتاب های ابتدایی و انتهایی در تغییر مقادیر سرعت  
ضریب  $\beta$  وزن اثر شتاب های ابتدایی و انتهایی در تغییر مقادیر تغییر مکان

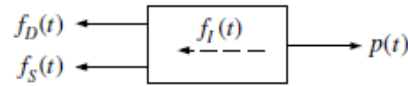
سه روش نیومارک:

$\beta$	$\delta$	
0	0	روش شتاب ثابت
1/4	1/2	روش شتاب میانگین
1/6	1/2	روش شتاب خطی

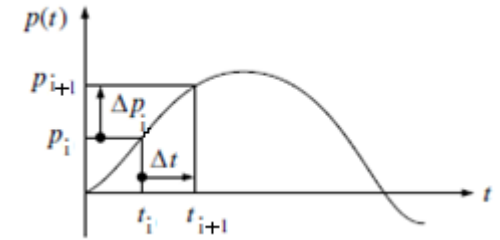
# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی



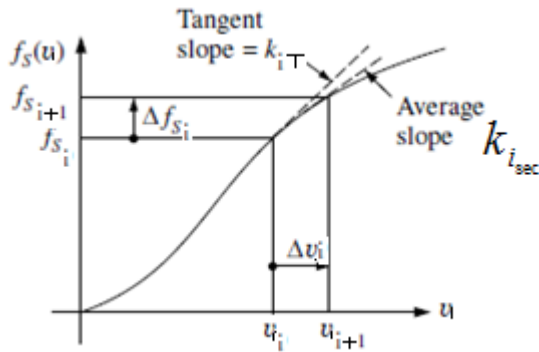
مدل سازه یک درجه آزادی با مشخصه های  $k$  و  $m$  و  $c$



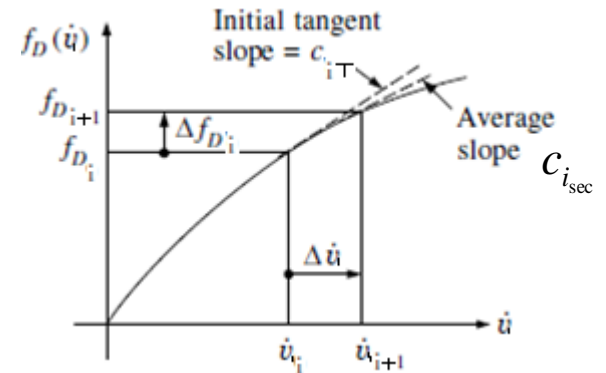
نمایش تعادل نیروهای وارد بر جسم



نمایش بارگذاری وارد بر جسم



نمایش سختی غیر خطی سیستم



نمایش میرایی غیر خطی سیستم

# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی

معادله تعادل نیروها در لحظه  $t_i$

$$f_{I_i} + f_{D_i} + f_{s_i} = p_i$$

معادله تعادل نیروها در لحظه  $t_{i+1}$

$$f_{I_{i+1}} + f_{D_{i+1}} + f_{s_{i+1}} = p_{i+1}$$

با تفریق دو معادله فوق شکل نموی معادله حرکت بدست می آید:

$$\Delta f_{I_i} + \Delta f_{D_i} + \Delta f_{s_i} = \Delta p_i$$

که نیروهای نموی در این رابطه را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Delta f_{I_i} = f_{I_{i+1}} - f_{I_i} = m \Delta \ddot{u}_i$$

$$\Delta f_{D_i} = f_{D_{i+1}} - f_{D_i} = c_{i_{\text{sec}}} \Delta \dot{u}_i$$

$$\Delta f_{s_i} = f_{s_{i+1}} - f_{s_i} = k_{i_{\text{sec}}} \Delta u_i$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$$

# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی

■ جمله های  $c_{i_{sec}}$  ,  $k_{i_{sec}}$  در عبارات فوق بیانگر مقادیر میانگین ضرایب میرایی و سختی در فاصله زمانی موردنظر بوده و بوسیله شیب های میانگین (شیب خطوط قاطع) در شکل های فوق مشخص شده اند.

■ در عمل این شیب های میانگین را تنها از روش تکرار می توان محاسبه کرد زیرا سرعت و تغییر مکان در پایان فاصله زمانی بستگی به این مشخصه ها دارند.

■ برای پرهیز از این تکرار، معمولا در عمل بجای شیب های تقاطعی (وتری) از شیب های مماسی اولیه استفاده می شود:

$$c_{i_{sec}} \approx \left( \frac{df_D}{d\dot{u}} \right)_{t=t_i} = c(t_i) = c_{i_T}$$

$$k_{i_{sec}} \approx \left( \frac{df_s}{du} \right)_{t=t_i} = k(t_i) = k_{i_T}$$

# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی

■ بنابراین شکل نهایی معادله نموی حرکت در زمان  $t_i$  به صورت زیر بدست می آید:

$$m\Delta\ddot{u}_i + c(t_i)\Delta\dot{u}_i + k(t_i)\Delta u_i = \Delta p_i$$

■ حال روش انتگرال گیری نیومارک را که قبلا توضیح داده شده است به شکل نموی درمی آوریم. قبلا لازم به اشاره است که:

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i, \quad \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i, \quad \Delta p_i = p_{i+1} - p_i \quad (i)$$

■ بر این اساس روابط نیومارک برای سرعت و تغییرمکان را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\Delta \dot{u}_i = \Delta t \ddot{u}_i + (\delta \Delta t) \Delta \ddot{u}_i \quad (ii)$$

$$\Delta u_i = \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_i \quad (iii)$$



# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی

■ با حل رابطه اخیر برای  $\Delta\ddot{u}_i$  داریم:

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i \quad (iv)$$

■ با قرار دادن رابطه فوق در معادله (ii) داریم:

$$\Delta\dot{u}_i = \frac{\beta}{\beta\Delta t} \Delta u_i - \frac{\delta}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \ddot{u}_i \quad (v)$$

■ با جایگذاری عبارت های بدست آمده برای نمو سرعت و نمو شتاب (روابط iv و v) در رابطه نموی حرکت خواهیم داشت:

معادله نموی حرکت  $m\Delta\ddot{u}_i + c(t_i)\Delta\dot{u}_i + k(t_i)\Delta u_i = \Delta p_i$

$$\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i \quad (vi)$$

$$\hat{k}_i = k(t_i) + \frac{\delta}{\beta\Delta t} c(t_i) + \frac{1}{\beta\Delta t^2} m$$

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left[ \frac{1}{\beta\Delta t} m - \frac{\delta}{\beta} c(t_i) \right] \dot{u}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) c(t_i) \right] \ddot{u}_i$$

# فرمول بندی نموی معادله حرکت برای تحلیل سیستم های غیر خطی

بدیهی است در مسائل خطی  $\hat{k}_i = \hat{k}$  یعنی ثابت خواهد بود. ■

$$\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}_i} \quad (vii) \quad \rightarrow \quad \Delta u_i \text{ معلوم} \quad \rightarrow \quad u_{i+1} \text{ معلوم}$$

$$(v) \quad \rightarrow \quad \Delta \dot{u}_i \text{ معلوم} \quad \xrightarrow{i} \quad \dot{u}_{i+1} \text{ معلوم}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (iv) \quad \rightarrow \quad \Delta \ddot{u}_i \text{ معلوم} \quad \xrightarrow{i} \quad \ddot{u}_{i+1} \text{ معلوم} \\ \text{یا} \end{array} \right.$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c(t)\dot{u}_{i+1} - k(t)u_{i+1}}{m} \quad (\text{این رابطه برای تعیین } \ddot{u}_i \text{ به منظور شروع محاسبات لازم است})$$

## فصل پنجم

# سیستم‌های یک درجه آزادی تعمیم یافته

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته

## Generalized SDOF Systems

2

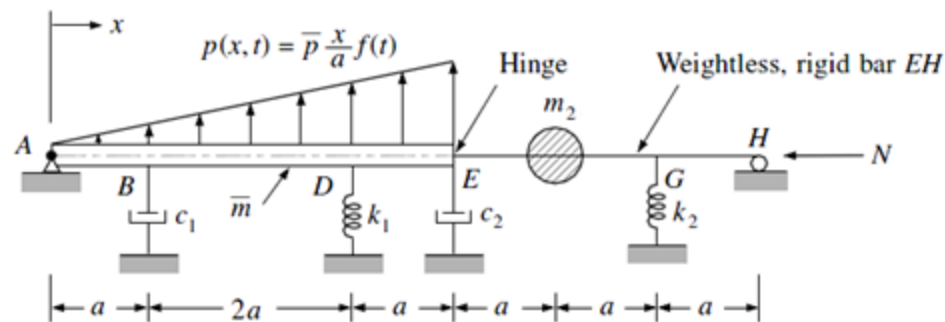
- کلیه حالاتی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند، همگی دارای شکل بسیار ساده‌ای بوده‌اند زیرا مشخصه‌های فیزیکی آنها (جرم، میرایی و الاستیسیته) هرکدام توسط یک عنصر مجزای منفرد نشان داده شده است.
- آنالیز اغلب سیستم‌های سازه ای واقعی، هرچند که بتوان آنها را سازه‌ای با یک درجه آزادی در نظر گرفت، نیازمند مدل‌های بسیار پیچیده‌تری است.
- بدین سبب دو گروه متمایز سازه های یک درجه آزادی تعمیم یافته را می‌توان در نظر گرفت:
  - (۱) سیستم‌های متشکل از مجموعه‌ای از اجسام صلب که در آنها تغییر مکان‌های الاستیک منحصرأ محدود به فنرهای بدون وزنی است که بصورت متمرکز در جاهای مختلف قرار دارند.
  - (۲) سیستم‌های با جرم و سختی گسترده که تغییر شکل‌های آنها، در کل سازه و یا قسمت‌هایی از آن بصورت پیوسته می باشد.

- در هر دو حالت فوق، با فرض اینکه سازه فقط دارای یک شکل تغییرمکان منحصر بفرد است، مانند سیستمی با یک درجه آزادی عمل می کند.
- در سازه هایی که بصورت مجموعه ای از اجسام صلب هستند، محدودیت سیستم به یک شکل تغییرمکانی منحصر بفرد غالباً نتیجه شکل سرهم بندی شده خاص سیستم (نحوه اتصال اجسام) است یعنی اجسام صلب توسط تکیه گاه ها و مفصل ها طوری مقید هستند که تنها یک نوع تغییرمکان برای آنها امکان پذیر است.
- در سازه های با الاستیسیته پیوسته، محدودیت سیستم به یک شکل تغییرمکانی، صرفاً یک فرض است، در عمل الاستیسیته پیوسته امکان انجام بینهایت تغییرمکان های گوناگون را می دهد.

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

تنها تغییرشکل الاستیک که در این نوع سیستم ها رخ می دهد، تغییرطول فنرهای موجود در سیستم است. در تحلیل این سیستم ها، تغییرشکلی را باید برای آن در نظر گرفت که شرایط تکیه گاهی و نیز پیوستگی اجزاء آنرا اقماع نماید.

مثالی از یک سیستم یک درجه آزادی متشکل از مجموعه ای از اجسام صلب مطابق شکل زیر، در ادامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

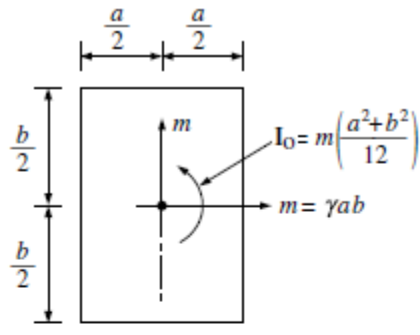
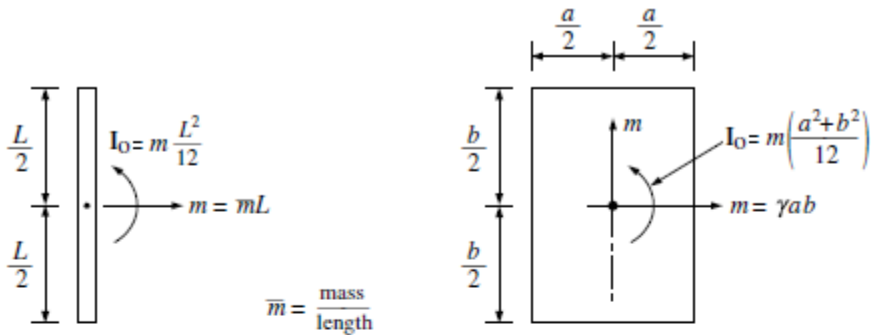
- بر اثر حرکت سیستم، تغییر طول هایی در فنرهای موجود در مدل آن بوجود می آید که نتیجه آن اعمال نیروهای الاستیک به سیستم است.
- بطور مشابه نیروهای میرایی نیز متناسب با مقدار سرعت موجود در محل عناصر میرا کننده مدل بوجود می آیند.
- همچنین در روند استخراج معادله حرکت، می توان بارهای خارجی گسترده ای را که به اجزای سیستم وارد می شوند با برآیند آنها جایگزین نمود.
- لازم به ذکر است که اگر عناصر صلب سیستم فقط دارای جرم های متمرکز باشند بر اثر حرکت آن فقط نیروهای اینرسی انتقالی متمرکز پدید می آیند که متناسب با شتابهای مربوطه را در محل آن جرم ها خواهند بود. اما اگر عناصر صلب سیستم دارای ابعادی باشند که نتوان آنها را بصورت ذره فرض نمود، در این صورت نیروهای اینرسی گسترده بوجود می آیند.

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

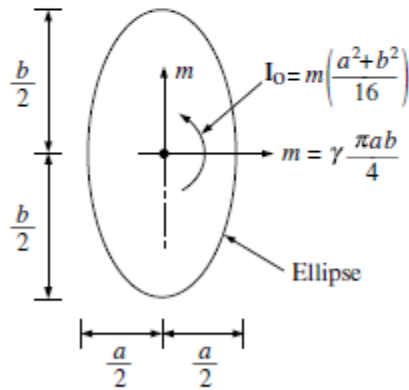
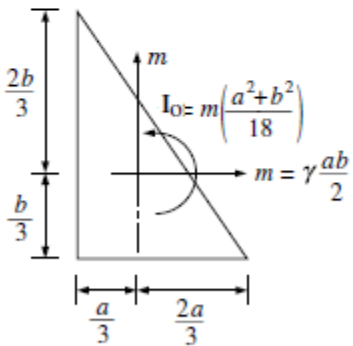
6

ساده ترین روش احتساب نیروهای اینرسی گسترده آن است که آنها را بر اساس جرم متمرکز در مرکز جرم جسم و لنگر اینرسی جرمی حول مرکز جرم جسم محاسبه نماییم.

در شکل مقابل چند نمونه از اجسام صلب و روابط جرم و لنگر اینرسی جرمی آنها ارائه شده است.



$$\gamma = \frac{\text{mass}}{\text{area}}$$





# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

7

در ادامه به استخراج معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی تعمیم یافته زیر به روش کار مجازی پرداخته می شود.

$$f_{S_1} = k_1 \cdot \frac{3}{4} z(t)$$

$$f_{S_2} = k_2 \cdot \frac{1}{3} z(t)$$

$$f_{D_1} = c_1 \cdot \frac{1}{4} \dot{z}(t)$$

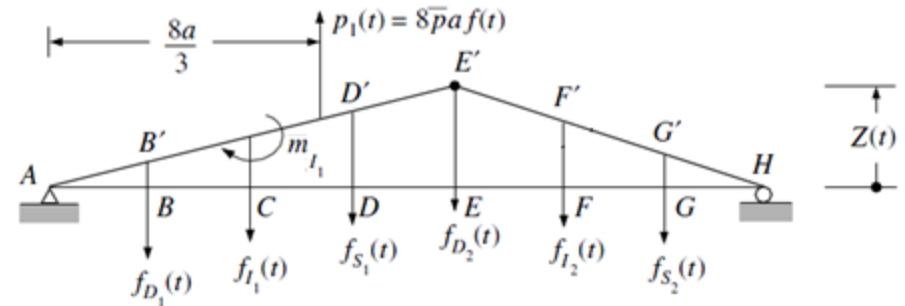
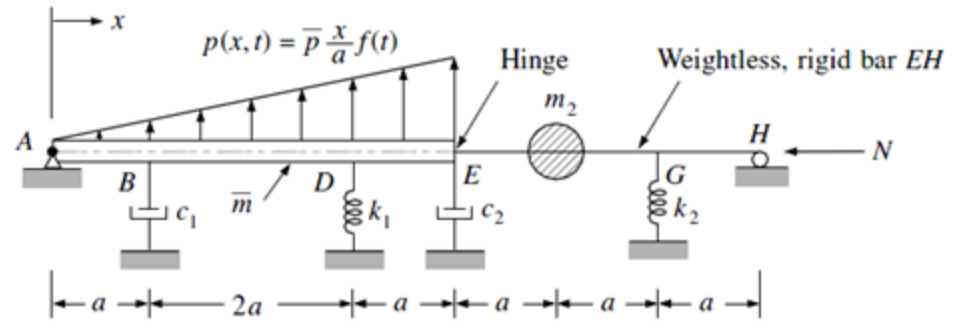
$$f_{D_2} = c_2 \cdot \dot{z}(t)$$

$$f_{I_1} = (4\bar{m}a) \cdot \frac{1}{2} \ddot{z}(t)$$

$$f_{I_2} = m_2 \cdot \frac{2}{3} \ddot{z}(t)$$

$$m_{I_1} = I_0 \ddot{\Theta} = \underbrace{\left( \frac{1}{12} \bar{m} (4a)^3 \right)}_{\frac{1}{12} m l^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{z(t)}{4a} \right) = \frac{4}{3} \bar{m} a^2 \ddot{z}(t)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \bar{p} \frac{4a}{a} \zeta(t) \cdot 4a = 8\bar{p}a \zeta(t)$$



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

کل کار مجازی در طول تغییر مکان مجازی  $\delta W = 0$

$$\delta W = -f_{s_1} \cdot \frac{3}{4} \delta z - f_{s_2} \cdot \frac{1}{3} \delta z - f_{D_1} \cdot \frac{1}{4} \delta z - f_{D_2} \cdot \delta z - f_{I_1} \cdot \frac{\delta z}{2} - m_{I_1} \cdot \frac{\delta z}{4a} - f_{I_2} \cdot \frac{2}{3} \delta z + p_1 \cdot \frac{2}{3} \delta z = 0$$

$$\delta z \cdot \left( -\frac{9}{16} k_1 z(t) - \frac{1}{9} k_2 z(t) - \frac{1}{16} c_1 \dot{z}(t) - c_2 \dot{z}(t) - \bar{m} a \ddot{z}(t) - \frac{\bar{m} a}{3} \ddot{z}(t) - \frac{4}{9} m_2 \ddot{z}(t) + \frac{16}{3} \bar{p} a \zeta(t) \right) = 0$$

$$\delta z \neq 0 \rightarrow \underbrace{\left( \frac{4}{3} \bar{m} a + \frac{4}{9} m_2 \right)}_{m^*} \ddot{z}(t) + \underbrace{\left( \frac{1}{16} c_1 + c_2 \right)}_{c^*} \dot{z}(t) + \underbrace{\left( \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \right)}_{k^*} z(t) = \underbrace{\frac{16}{3} \bar{p} a \zeta(t)}_{p^*(t)}$$

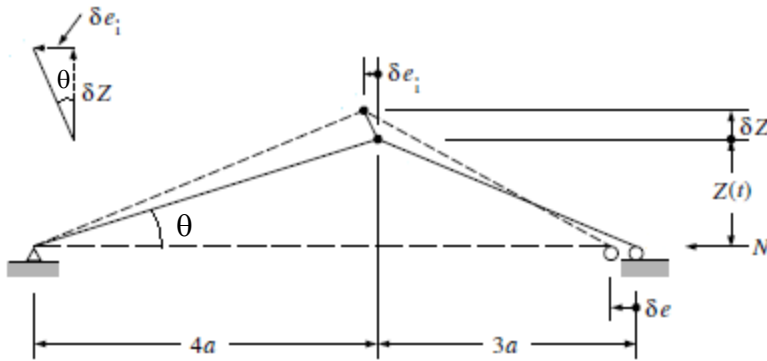
جرم تعمیم یافته
میرایی تعمیم یافته
سختی تعمیم یافته
بار تعمیم یافته

$$m^* \ddot{z}(t) + c^* \dot{z}(t) + k^* z(t) = p^*(t)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

اثر نیروی محوری خارجی  $N$  :

$\delta e$  تغییر مکان مجازی نقطه اثر نیروی  $N$  در خلال تغییر مکان مجازی  $\delta Z$  از دو بخش  $\delta e_{AB}$  و  $\delta e_{BC}$  که به دوران دو میله  $AB$  و  $BC$  مربوط می شود تشکیل می شود:



$$\tan \theta = \frac{\delta e_i}{\delta Z} = \frac{z(t)}{l} \rightarrow \delta e_i = \frac{z(t)}{l} \delta Z$$

$$\delta e = \delta e_{AB} + \delta e_{BC} = \frac{z(t)}{4a} \delta Z + \frac{z(t)}{3a} \delta Z = \frac{7}{12} \frac{z(t)}{a} \delta Z$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

کار مجازی انجام شده توسط نیروی  $N$  عبارت خواهد بود از:

$$\delta W_N = N \cdot \delta e = \frac{7}{12} \frac{Nz(t)}{a} \delta z$$

هر گاه این جمله نیز به عبارت کل کار مجازی اضافه شود تنها جمله مربوط به سختی تعمیم یافته را به شکل زیر تغییر خواهد داد:

$$\bar{k}^* = k^* - \frac{7}{12} \frac{N}{a} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 - \frac{7}{12} \frac{N}{a}$$

ملاحظه می شود نیروی محوری فشاری سبب کاهش سختی سیستم می شود (و بالعکس نیروی محوری کششی سبب افزایش سختی می شود).

سختی تعمیم یافته صفر نشانگر کمانش سازه خواهد بود:

$$\bar{k}^* = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 - \frac{7}{12} \frac{N}{a} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{cr} = \left( \frac{27}{25} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

مثالی دیگر از سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب در ادامه مورد بررسی قرار گرفته است:

$$f_S = k \cdot \frac{2z(t)}{3}$$

$$f_D = c \cdot \frac{\dot{z}(t)}{3}$$

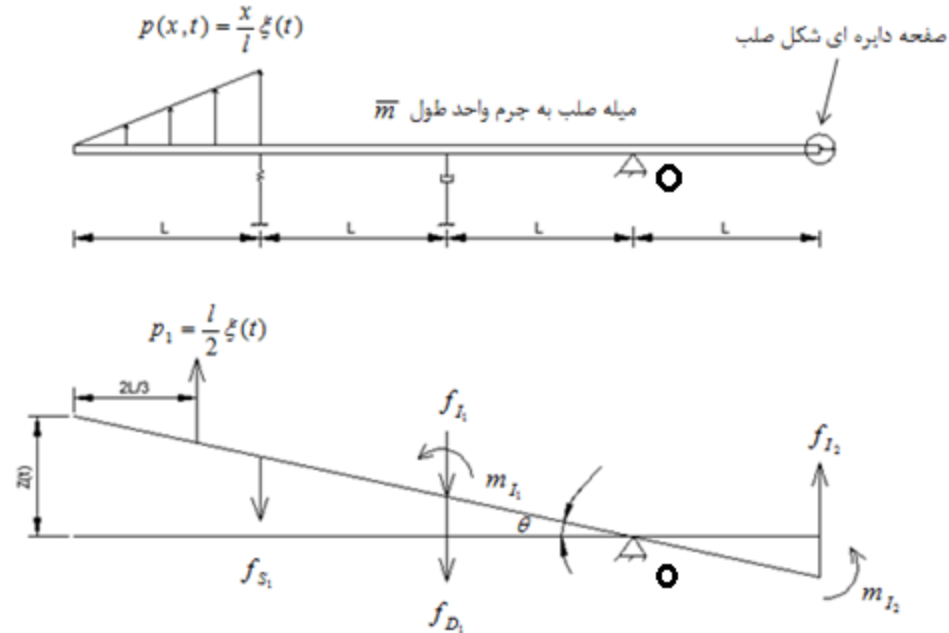
$$f_{I_1} = (4\bar{m}l) \frac{\ddot{z}(t)}{3}$$

$$m_{I_1} = \left( \frac{(4\bar{m}l)(4l)^2}{12} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{z(t)}{3l} \right) = \frac{16}{9} \bar{m}l^2 \ddot{z}(t)$$

$$f_{I_2} = m \frac{\ddot{z}(t)}{3}$$

$$m_{I_2} = \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right) \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{z(t)}{3l} \right) = \frac{1}{24} \bar{m}l \ddot{z}(t)$$

$$p = \frac{1}{2} l \zeta(t)$$



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته متشکل از اجسام صلب

12

$$\sum M_{/0} = 0 \rightarrow f_{I_1} \cdot l + m_{I_1} + f_{I_2} \cdot l + m_{I_2} + f_D \cdot l + f_S \cdot 2l - p_1 \left( 2l + \frac{l}{3} \right) = 0$$

$$\frac{4\bar{m}l^2}{3} \ddot{z}(t) + \frac{16}{9} \bar{m}l^2 \ddot{z}(t) + \frac{ml}{3} \ddot{z}(t) + \frac{ml}{24} \ddot{z}(t) + \frac{cl}{3} \dot{z}(t) + \frac{4kl}{3} z(t) = \frac{7l^2}{6} \zeta(t)$$

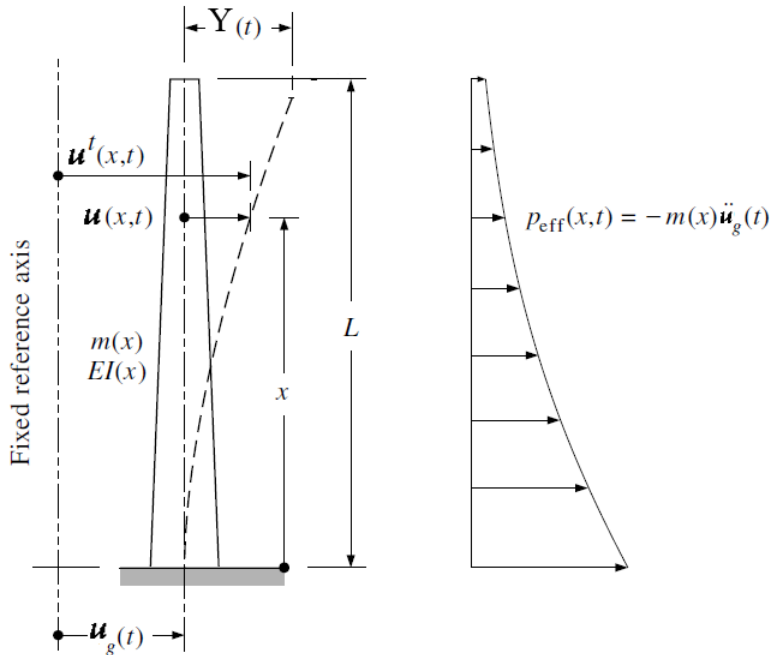
$$\underbrace{\left( \frac{28}{9} \bar{m}l + \frac{3m}{8} \right)}_{m^*} \ddot{z}(t) + \underbrace{\left( \frac{c}{3} \right)}_{c^*} \dot{z}(t) + \underbrace{\left( \frac{4k}{3} \right)}_{k^*} z(t) = \underbrace{\frac{7l}{6}}_{p^*} \zeta(t)$$

$$m^* \ddot{z}(t) + c^* \dot{z}(t) + k^* z(t) = p^*(t)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

- تغییرشکل در سیستم‌هایی که خواص الاستیسیته گسترده‌ای دارند بصورت پیوسته رخ می‌دهد، این تغییرشکل منحصر بفرد نمی‌باشد زیرا با توجه به اینکه سیستم دارای بینهایت درجه آزادی است به صور گوناگون تغییرشکل می‌دهد.
- ولی با فرض اینکه تغییرشکل سیستم فقط به یک شکل معین محدود شود می‌توان هر سازه با شکل اختیاری را، بصورت سیستمی با یک درجه آزادی در نظر گرفت.
- این روش را می‌توان بطور موثری در مهندسی زلزله بکار برد زیرا فرم تغییرشکل یافته بسیاری از سازه‌ها در اثر بارگذاری زلزله را می‌توان با تقریب تخمین زد.
- برای نشان دادن این روش تقریبی (فرض رفتار یک درجه آزادی برای سیستمی که عملاً دارای بینهایت درجه آزادی است) فرمول‌بندی معادلات حرکت برجی طره‌ای شکل با سختی خمشی  $EI(x)$  و جرم واحد طول  $m(x)$  تحت اثر حرکت زمین بر اثر زلزله  $u_g(t)$  در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده



■ برای محاسبه تقریبی حرکت این سیستم بصورت یک درجه آزادی، بایستی فرض گردد که این برج فقط به یک شکل می تواند تغییرمکان دهد. تابع شکل را با  $\psi(x)$  و دامنه حرکت را با مختصات تعمیم یافته  $Y(t)$  نشان می دهیم. به این ترتیب:

$$u(x,t) = \psi(x)Y(t) \quad (1)$$

■ معمولاً مختصات تعمیم یافته بصورت تغییرمکان نقطه مبنا مناسبی از سیستم انتخاب می شود، مانند تغییرمکان نقطه بالایی این برج. لذا تابع شکل، نسبت تغییرمکان هر نقطه به این تغییرمکان مبنا است که بدون بعد می باشد:

$$\psi(x) = \frac{u(x,t)}{Y(t)} \quad (2)$$



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

## توضیح در مورد تابع شکل $\Psi(x)$ :

- هر شکلی را که شرایط مرزی هندسی سازه را ارضا نماید، می توان برای  $\Psi(x)$  فرض کرد.
- توابع شکل، توابع درونیابی برای تعیین تغییرمکان در نقاط داخلی می باشند. توابع شکل نقش اساسی در تحلیل عناصر محدود دارند.
- اگر تابع شکل بصورت دقیق انتخاب شود، سختی حداقل مقدار را خواهد داشت. انتخاب هر شکل دیگری غیر از شکل واقعی متضمن وجود قیود خارجی اضافی در سازه است که این امر باعث افزایش سختی سازه می گردد.
- در اصل هر تابعی را که مشخصات عمومی انحراف سازه را بیان کند و با شرایط تکیه گاهی سازگار باشد می توان بکار برد. اما هر شکلی بجز شکل واقعی ارتعاش سازه، برای برقراری تعادل نیاز به قید های اضافی خارجی دارد. این قید های اضافی باعث سخت تر شدن دستگاه و افزایش فرکانس محاسبه شده می شوند. شکل ارتعاش واقعی هیچگونه قید اضافی ندارد و در نتیجه دارای کمترین مقدار فرکانس ارتعاش است.

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

- بنابراین در بین چند شکل فرض شده برای انحراف سازه، آنکه دارای کمترین مقدار فرکانس باشد بهترین فرض محسوب می شود.
- یک تقریب خوب برای شکل واقعی ارتعاش بدین ترتیب بدست می آید که تغییرشکل استاتیکی حاصل از نیروهای اینرسی را برای تعیین تابع شکل در نظر بگیریم.
- با بکار بردن تعداد توابع شکل بیشتر برای توصیف تغییرشکل، می توان سیستمی با تعداد درجات بیشتر و دقیق تر را مدلسازی نمود:

$$u(x, t) = \psi_1(x)Y_1(t) + \psi_2(x)Y_2(t) + \dots$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

■ معادله حرکت این سیستم تعمیم یافته برای برج طره ای را می توان به سادگی از اصل کار و یا انرژی بدست آورد. در اینجا برای نشان دادن روش این فرمول بندی از اصل هامیلتون استفاده می شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0$$

$T$  = انرژی جنبشی کل سیستم

$V$  = انرژی پتانسیل سیستم، شامل انرژی کرنشی و پتانسیل نیروهای پایستار خارجی

$W_{nc}$  = کار انجام شده توسط نیروهای غیرپایستار اعمال شده بر سیستم، شامل استهلاک و هر نیروی

خارجی دلخواه

$\delta$  = تغییرات در طول فاصله زمانی

■ در این سازه هیچ نیروی دینامیکی که بصورت مستقیم بر سازه وارد شده باشد وجود ندارد و از اثر میرایی نیز صرف نظر شده است بنابراین هیچ نیروی غیرپایستاری وجود ندارد. در نتیجه اصل هامیلتون به صورت زیر در می آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt = 0 \quad (3)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

$$\text{انرژی جنبشی برج} \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{u}^t(x, t)]^2 dx \quad (4)$$

$$\text{انرژی پتانسیل تغییرشکل های خمشی} \quad V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [u''(x, t)]^2 dx \quad (5)$$

که  $u'' = \frac{d^2 u}{dx^2}$  می باشد. با جایگزین کردن روابط (5), (4) در رابطه (3) نتیجه می شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \delta [\dot{u}^t(x, t)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \delta [u''(x, t)]^2 dx \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L m(x) \dot{u}^t(x, t) \delta \dot{u}^t dx - \int_0^L EI(x) u''(x, t) \delta u'' dx \right] dt = 0 \quad (6)$$

حال با توجه به روابط زیر:

$$u = \psi Y \rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \psi \dot{Y} \\ u' = \psi' Y \rightarrow u'' = \psi'' Y \rightarrow \delta u'' = \psi'' \delta Y \end{cases}$$

$$u^t = u + u_g = \psi Y + u_g \rightarrow \dot{u}^t = \psi \dot{Y} + \dot{u}_g \rightarrow \delta \dot{u}^t = \psi \delta \dot{Y}$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

و با جایگزین کردن آنها در رابطه (6) خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L m(x) (\Psi \dot{Y} + \dot{u}_g) \Psi \delta \dot{Y} dx - \int_0^L EI(x) \Psi'' Y \Psi'' \delta Y dx \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \dot{Y} \delta \dot{Y} \int_0^L m(x) \Psi(x)^2 dx + \dot{u}_g \delta \dot{Y} \int_0^L m(x) \Psi(x) dx - Y \delta Y \int_0^L EI(x) [\Psi''(x)]^2 dx \right] dt = 0 \quad (7)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m^* \dot{Y} \delta \dot{Y} + \mathcal{L} \dot{u}_g \delta \dot{Y} - k^* Y \delta Y] dt = 0 \quad (8)$$

یا

که در آن:

$$m^* = \int_0^L m(x) \Psi(x)^2 dx \quad (9 - a)$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) [\Psi''(x)]^2 dx \quad (9 - b)$$

$$\mathcal{L} = \int_0^L m(x) \Psi(x) dx \quad (9 - c)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

با انتگرال گیری جزء بجزء از دو عبارت اول رابطه (8) خواهیم داشت:

$$m^* \int_{t_1}^{t_2} \dot{Y} \delta \dot{Y} dt + \mathcal{L} \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_g \delta \dot{Y} dt - k^* \int_{t_1}^{t_2} Y \delta Y dt = 0$$

$$m^* (\dot{Y} \delta Y |_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{Y} \delta Y dt) + \mathcal{L} (\dot{u}_g \delta Y |_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_g \delta Y dt) - k^* \int_{t_1}^{t_2} Y \delta Y dt = 0$$

یا

$$\int_{t_1}^{t_2} (m^* \ddot{Y} + k^* Y + \mathcal{L} \ddot{u}_g) \delta Y dt = 0 \quad (10)$$

از آنجا که تغییر  $\delta Y$  اختیاری است، عبارت داخل پرانتز بایستی صفر شود. بنابراین معادله نهایی حرکت را می توان بصورت زیر نوشت:

$$m^* \ddot{Y}(t) + k^* Y(t) = -\mathcal{L} \ddot{u}_g(t) = p_{eff}^*(t) \quad (11)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

■ در معادله فوق :  $m^*$  جرم تعمیم یافته،  $k^*$  سختی تعمیم یافته و  $p_{eff}^*(t)$  بار موثر تعمیم یافته نامیده می شوند. کمیت  $L$  ضریب تحریک زلزله (earthquake excitation factor) است که بیانگر آن است که حرکت زلزله تا چه حد باعث تحریک جرم سازه در شکل فرض شده  $\Psi(x)$  آن، شده است.

■ اگر بخواهیم برای سازه میرایی نیز در نظر بگیریم، معادله (۱۱) به صورت زیر در می آید:

$$m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + k^* Y(t) = -L \ddot{u}_g(t) = p_{eff}^*(t) \quad (12)$$

■  $c^*$  در رابطه فوق میرایی تعمیم یافته است، در صورتی که ضریب میرایی  $c(x)$  بصورت پیوسته در ارتفاع برج تغییر یابد:

$$c^* = \int_0^L c(x) [\Psi(x)]^2 dx \quad (13)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

اگر طرفین رابطه (12) را بر جرم تعمیم یافته تقسیم کنیم و نیز از علامت منفی صرف نظر کنیم، نتیجه می شود:

$$\ddot{Y}(t) + 2\xi\omega\dot{Y}(t) + \omega^2Y(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^*}\ddot{u}_g(t) \quad (14)$$

در رابطه فوق نسبت میرایی  $\xi$  بدین صورت تعریف می شود:

$$\xi = \frac{c^*}{2m^*\omega} \quad (15)$$

و  $\omega$  فرکانس دورانی ارتعاش می باشد (روش رایلی برای محاسبه فرکانس طبیعی سازه):

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (16)$$

با حل معادله دیفرانسیل (14) برای  $Y(t)$  و سپس استفاده از رابطه (1) تغییرمکان سازه بر حسب زمان بدست می آید:

$$u(x, t) = \psi(x)Y(t)$$



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

برطبق معادله (14) وجه تمایز بین واکنش سیستم یک درجه آزادی در حالت های جرم متمرکز و تعمیم یافته، ضریب  $\frac{\mathcal{L}}{m^*}$  است. این ضریب بستگی به توزیع جرم سازه و تابع شکل فرض شده دارد و در حالت کلی اختلاف زیادی با ضریب ۱ دارد.

جواب معادله (14) را می توان بوسیله انتگرال دیوهامل بدست آورد (با فرض  $\omega_D \approx \omega$ )

$$Y(t) = \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \exp[-\xi \omega(t - \tau)] \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega} V(t) \quad (17)$$

عبارت انتگرالی  $V(t)$  در رابطه فوق، اصطلاحاً انتگرال واکنش نامیده می شود. مقادیر ماکزیمم  $Y$  را که از انتگرال فوق بدست می آید می توان بر حسب شتاب طیفی  $S_a$  نوشت

$$Y_{max} = \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega^2} S_a \quad (18) \quad : (S_a = \omega S_v = \omega V_{max})$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

بنابر این با استفاده از رابطه (۱) تغییرمکان سازه در هر لحظه و مقدار ماکزیمم آن حاصل می شود:

$$u(x, t) = \Psi(x)Y(t) = \Psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega} V(t)$$

$$u_{max}(x) = \Psi(x)Y_{max} = \Psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^* \omega^2} S_a \quad (19)$$

برای بیان نیروهای الاستیک ناشی از حرکت زلزله می توان از روش کلی شرح داده شده برای حالت جرم متمرکز استفاده کرد. بدین ترتیب که این نیروها بر حسب نیروهای اینرسی ارتعاش آزاد بیان می شوند، با داشتن تغییرمکان ماکزیمم، شتاب موثر ماکزیمم را می توان پیدا کرد:

$$\ddot{u}^t(x, t) \approx \omega^2 u(x, t)$$

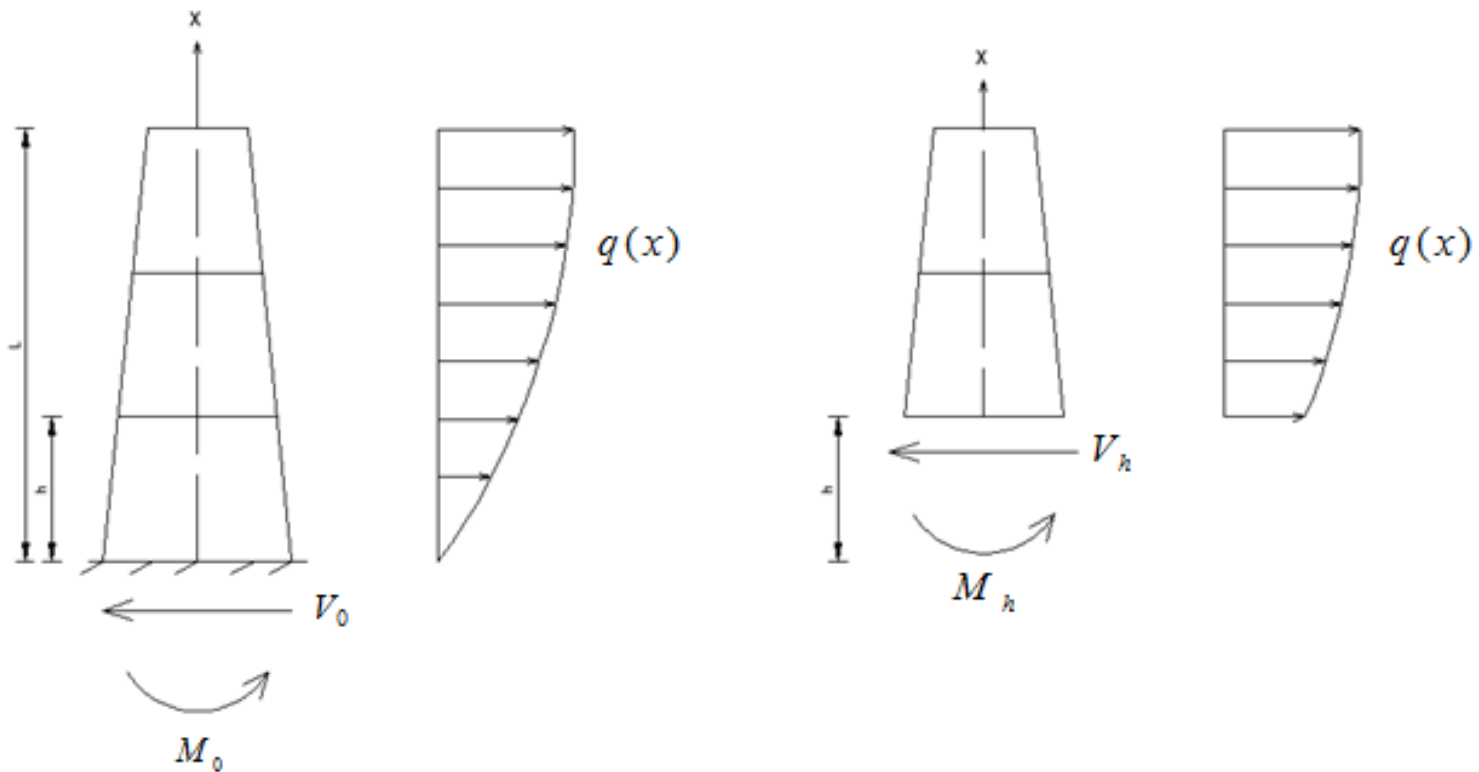
$$\ddot{u}_{max}^t(x) = \omega^2 u_{max}(x) = \Psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \quad (20)$$

نیروی موثر ماکزیمم در واحد طول سازه برابر است با:

$$q(x) = m(x) \ddot{u}_{max}^t(x) = m(x) \Psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \quad (21)$$

# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

با استفاده از این نیروهای گسترده که در شکل زیر ترسیم شده است، هر نتیجه دلخواهی از پاسخ نیرو و نظیر نیروی برشی پایه و ... را می توان از طریق روش های متداول استاتیکی بدست آورد.



# سیستم های یک درجه آزادی تعمیم یافته با جرم و سختی گسترده

به عنوان مثال برش تکیه گاهی  $V_0$  برابر است با:

$$V_0 = \int_0^L q(x) dx = \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \int_0^L m(x) \Psi(x) dx$$

یعنی

$$V_0 = \frac{\mathcal{L}^2}{m^*} S_a \quad (22)$$

همچنین لنگر تکیه گاهی برابر است با:

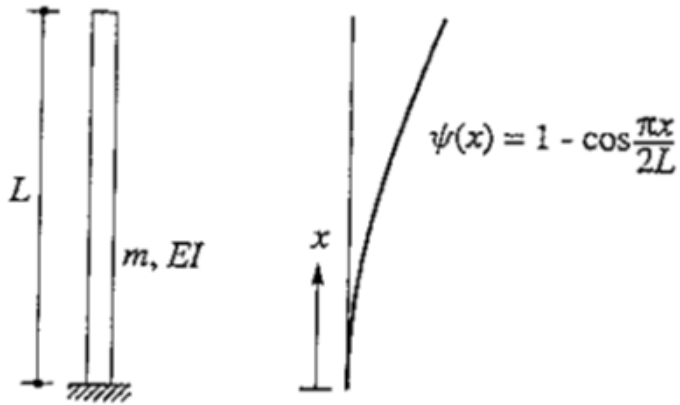
$$M_0 = \int_0^L q(x)x dx = \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \int_0^L m(x) \Psi(x)x dx \quad (23)$$

برش و لنگر در هر ارتفاع  $h$  برابر است با:

$$V_h = \int_h^L q(x) dx = \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \int_h^L m(x) \Psi(x) dx \quad (24)$$

$$M_h = \int_h^L q(x)(x-h) dx = \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a \int_h^L m(x) \Psi(x)(x-h) dx \quad (25)$$

**مثال:** ستون طره ای یکنواخت شکل مقابل، تحت تحریک تکیه گاهی  $u_g(t)$  زلزله طبس قرار می گیرد. مطلوبست تعیین واکنش سازه با استفاده از مدل یک درجه آزادی تعمیم یافته.



$$\bar{m} = 7000 \text{ kg/m}$$

$$EI = 106 \times 10^9 \text{ N.m}^2$$

$$\xi = 5\%$$

با توجه به شرایط مرزی موجود

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \rightarrow \psi(0) = 0 \\ u'(0,t) = 0 \rightarrow \psi'(0) = 0 \\ u(l,t) = \psi(t) \rightarrow \psi(l) = 1 \end{cases} \rightarrow \psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$$

جرم و سختی تعمیم یافته با بکار بردن معادلات (9-a,b) برابر خواهند بود با:

$$m^* = \int_0^L m(x) \Psi(x)^2 dx = \bar{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228 \bar{m} L$$

$$m^* = 0.228(7000)(30) = 47880 \text{ kg}$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) (\Psi''(x))^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{EI}{L^3}$$

$$k^* = \frac{\pi^4}{32} \cdot \frac{104 \times 10^9}{30^3} = 11.725 \times 10^6 \text{ N/m}$$

و ضریب تحریک زلزله بنابر معادله (9-c) برابر است با:

$$\mathcal{L} = \int_0^L m(x)\Psi(x)dx = \bar{m} \int_0^L \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)dx = 0.364\bar{m}l$$

$$\mathcal{L} = 0.364(7000)(30) = 76440 \text{ kg}$$

با استفاده از مقادیر فوق فرکانس ستون برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{4.26}{0.456}} = 15.65 \text{ rad/sec}$$

بنابراین دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{15.65} = 0.4 \text{ sec} \rightarrow S_a = 1.6g = 1.6 \times 9.81 = 15.70 \text{ m/s}^2$$

بر اساس رابطه (18):

$$Y_{max} = \frac{\mathcal{L}}{m^*\omega^2} S_a = \frac{76440}{47880 \times 15.65^2} \times 15.70 = 0.102 \text{ m}$$

و حد اکثر تغییر مکان ستون با استفاده از معادله (19) عبارت است از:

$$U_{max}(x) = \Psi(x)Y_{max} = 0.102(1 - \cos \frac{\pi x}{2 \times 30})$$

بطور مشابه حد اکثر برش تکیه گاهی (برش پایه) طبق معادله (22) برابر است با:

$$V_0 = \frac{\mathcal{L}^2}{m^*} S_a = \frac{76440^2}{47880} \times 15.70 = 1915961 \text{ N}$$

و حد اکثر نیروهای گسترده زلزله که بر ستون وارد می گردد برابر است با:

$$q(x) = m(x)\Psi(x) \frac{\mathcal{L}}{m^*} S_a = m(x)\Psi(x) \frac{V_0}{\mathcal{L}} = 7000 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \frac{1915961}{76440}$$

$$q(x) = 175454.30 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)$$



■ معادلات حرکت هر سیستم یک درجه آزادی را، هر چقدر هم که پیچیده باشد، همواره می توان به

شکل ساده زیر نوشت:

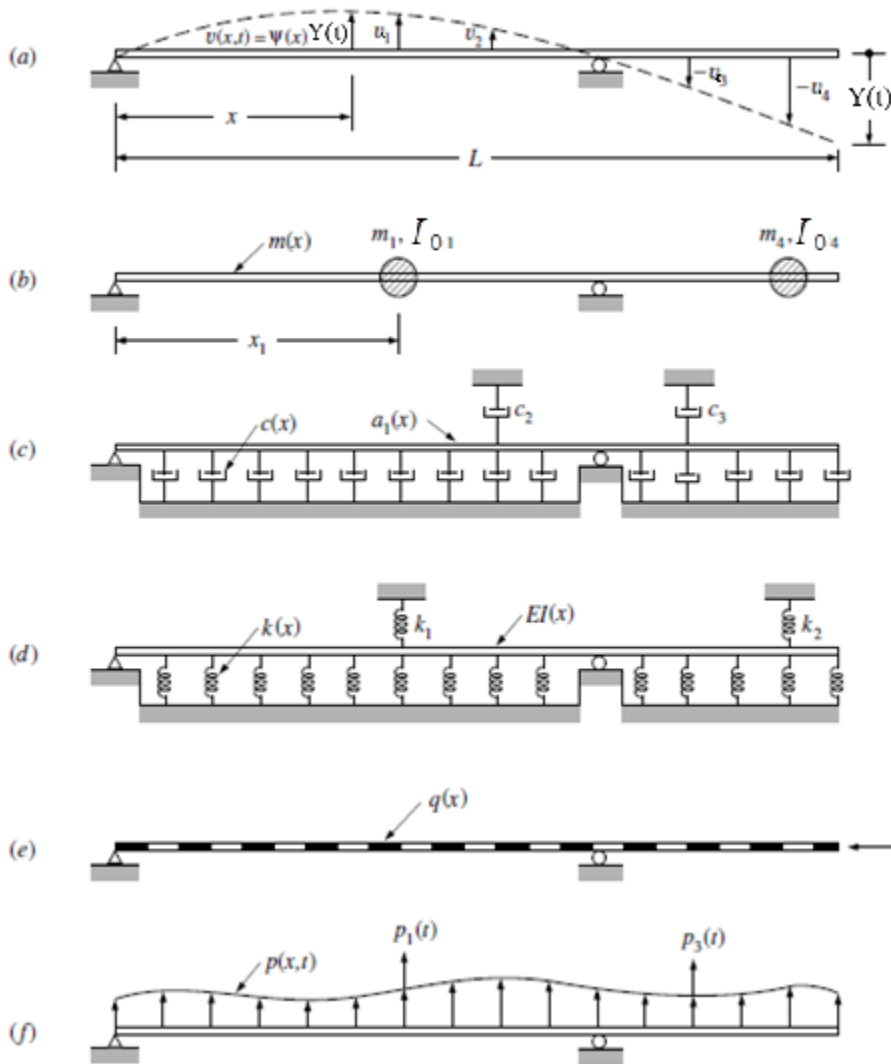
$$m^* \ddot{Y}(t) + c^* \dot{Y}(t) + \bar{k}^* Y(t) = p^*(t)$$

■ که  $Y(t)$  مختصات تعمیم یافته منحصر بفردی است که حرکت سیستم را تبیین می کند. به طور

کلی، مقادیر این مشخصه های تعمیم یافته را می توان با بکار بردن هر کدام از اصول هامیلتون یا تغییر مکان های مجازی محاسبه کرد.

■ شکل استاندارد شده این روابط را، که کاربرد بسیاری دارند، می توان به سادگی بدست آورد.

# روابط مشخصه تعمیم یافته سیستم



یک سیستم دلخواه یک بعدی مطابق شکل مقابل را در نظر بگیرید که دارای فقط یک شکل تغییرمکان فرضی مطابق شکل (a) باشد. بنابراین، تغییرمکانها را می توان بر حسب مختصات تعمیم یافته  $Y(t)$  نوشت:

$$u(x,t) = \psi(x)Y(t)$$

## روابط مشخصه تعمیم یافته سیستم

مشخصه های تعمیم یافته مربوط به این شکل را می توان به شرح زیر بیان کرد:

■ در مورد جرم پیوسته نشان داده شده در شکل (b) جرم تعمیم یافته عبارت است از:

$$m^* = \int_0^l m(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum m_i \psi_i^2 + \sum I_{0i} (\psi'_i)^2$$

که در آن، اثر جرم های اجسام صلب به صورت مجموع نشان داده شده است و  $\psi'_i$  چرخش نقطه  $i$  می باشد.

■ استهلاک تعمیم یافته که ناشی از استهلاک فونداسیون پیوسته و مستهلک کننده های موضعی  $c_i$  در شکل

(c) می باشد، عبارت است از:

$$c^* = \int_0^l c(x) [\psi(x)]^2 dx + \sum c_i \psi_i^2$$

## روابط مشخصه تعمیم یافته سیستم

34

■ سختی تعمیم یافته ناشی از فونداسیون الاستیک، سختی خمشی و فنرهای موضعی در شکل (d) عبارت

است از:

$$k^* = \int_0^l k(x) [\psi(x)]^2 dx + \int_0^l EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + \sum k_i \psi_i^2$$

■ سختی هندسی ناشی از نیروی محوری N (که نسبت به زمان متغیر نباشد)، نشان داده شده در شکل (e)،

عبارت است از:

$$k_G^* = N \int_0^l [\psi'(x)]^2 dx$$

در حالت کلی تر که موقعیت نیروی محوری در طول محور تغییر کند، رابطه به صورت زیر

$$k_G^* = \int_0^l N(x) [\psi'(x)]^2 dx$$

خواهد بود:

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^*$$

## روابط مشخصه تعمیم یافته سیستم

■ بالاخره، نیروی تعمیم یافته مربوط به بار متغیر زمانی در شکل (f) عبارت است از:

$$p^*(t) = \int_0^l p(x,t)\psi(x)dx + \sum p_i\psi_i$$

## فصل ششم

# سیستم‌های چند درجه آزادی

## فصل ششم - قسمت اول

تشکیل معادله حرکت سیستم‌های چند درجه آزادی

# تعیین درجات آزادی

■ در بخش پیش ملاحظه گردید که هر سازه ای را می توان به صورت سیستمی با یک درجه آزادی نشان داد و واکنش دینامیکی آن را از حل یک معادله حرک دیفرانسیلی بدست آورد.

■ اگر مشخصات فیزیکی سیستم به گونه ای باشد که بتوان حرکت آن را فقط با یک مؤلفه تعیین کرد و هیچ حرکت دیگری جایز نباشد در این صورت سیستم مذکور واقعا دارای یک درجه آزادی بوده و حل معادله حرکت واکنش دینامیکی دقیق آن را بدست خواهد داد.

■ اما اگر سازه در واقع دارای بیش از یک مد تغییرمکانی ممکن باشد و به واسطه فرض یک شکل تغییرمکان خاص، به طور ریاضی به سیستمی با یک درجه آزادی تقلیل یافته باشد، حل معادله حرکت فقط تقریبی از رفتار دینامیکی واقعی خواهد بود.

■ کیفیت حاصل از تقریب به صورت سیستمی بایک درجه آزادی به عوامل بسیاری بستگی دارد، که مهمترین آنها عبارتند از نحوه توزیع و تغییر زمانی بارگذاری و مشخصات سختی و جرم سازه.



# تعیین درجات آزادی

- اگر مشخصات فیزیکی سیستم آن را طوری مقید کند که براحتی مطابق با شکل فرض شده حرکت نماید و اگر بارگذاری طوری باشد که واکنش عمده در این شکل ایجاد شود، احتمالاً حل سیستم به صورت یک درجه آزادی تقریب خوبی را بدست خواهد داد، در غیر این صورت، رفتار واقعی سیستم شباهت اندکی به واکنش محاسبه شده خواهد داشت.
- یکی از بزرگترین عیوب استفاده از روش تقریب با یک درجه آزادی، آن است که ارزیابی میزان اعتبار نتایج حاصله، بسیار مشکل است.
- به طور کلی واکنش دینامیکی یک سازه را نمی‌توان توسط مدلی به صورت یک درجه آزادی به طور دقیق بیان کرد و معمولاً واکنش شامل تغییرات زمانی شکل تغییرمکان، علاوه بر دامنه آن می‌باشد.
- نشان دادن چنین رفتاری، فقط به کمک مؤلفه‌های تغییرمکانی متعدد، امکان‌پذیر است یعنی حرکت بایستی بصورت چند درجه آزادی معرفی گردد.

# تعیین درجات آزادی

■ درجات آزادی سیستم ناپیوسته را می‌توان دامنه‌های تغییرمکان نقاط انتخابی خاصی از سازه در نظر گرفت، یا می‌توانند مختصات تعمیم‌یافته‌ای باشند که بیانگر دامنه‌های مجموعه مشخصی از شکل‌های تغییرمکانی باشند.

■ در ساده‌ترین مدل از ساختمان‌های چند طبقه که به نام سازه برشی موسوم است فرض می‌شود که:

(۱) جرم کل سازه در سقف‌ها متمرکز شده باشد.

(۲) ستون‌ها بدون جرم باشند.

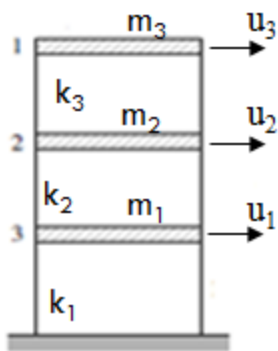
(۳) سیستم سقف‌ها و تیرها صلب باشند.

(۴) ستون‌ها بدون تغییرشکل محوری در نظر گرفته می‌شوند.

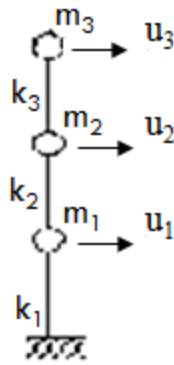
(۵) ستون‌ها در مقابل تغییرشکل جانبی انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند.

# تعیین درجات آزادی

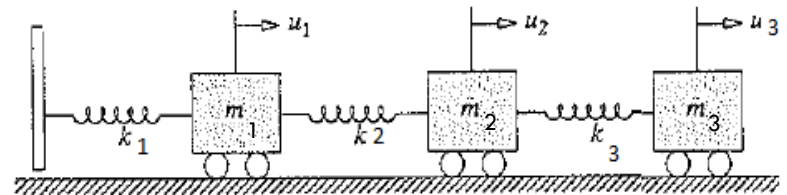
- در شکل (الف) یک نمونه سازه برشی سه طبقه نشان داده شده است.
- باید توجه داشت که ساختمان می تواند دارای هر تعداد دهانه باشد و فقط از نظر راحتی است که آن را با یک دهانه نشان می دهیم.
- حتی می توانیم ساختمان را به صورت یک تک ستون با جرم های متمرکز در تراز کف ها که فقط دارای جابجایی افقی هستند نیز نمایش دهیم (شکل ب).
- شکل دیگر نمایش آن به صورت یک سیستم متشکل از چند جرم و فنر مطابق شکل (ج) است. (مدل جرم و فنر).



(الف) مدل قاب  
یک دهانه



(ب) مدل تک  
ستون با جرمهای  
متمرکز



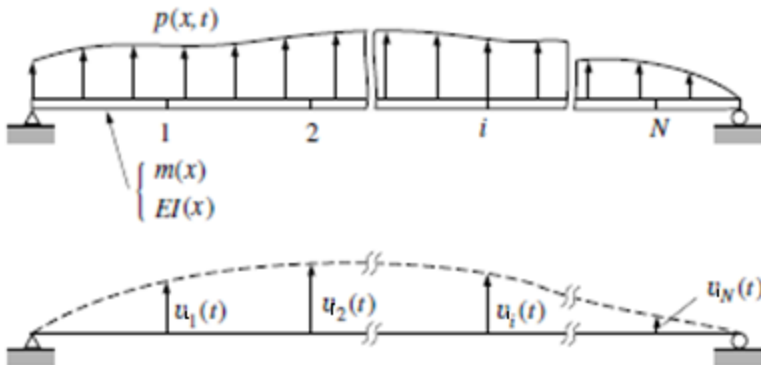
(ج) مدل جرم و فنر

# تعیین درجات آزادی

- در مدل سازه برشی، جرم های متمرکز در نقاط هم تراز با سقف ها با  $m_1, m_2, m_3$  نشان داده شده اند که در آن  $m_j$  جرم سقف  $j$ ام است.
- خواص الاستیک سازه با سختی های جانبی  $k_1, k_2, k_3$  مشخص گردیده به طوری که  $k_j$  سختی جانبی طبقه  $j$ ام، یعنی نیروی برشی لازم برای ایجاد جابجایی نسبی واحد در آن طبقه، است.

# تعیین درجات آزادی

- برای تعیین معادلات حرکت یک سیستم کلی چند درجه آزادی، می‌توان به عنوان نمونه تیر ساده نشان داده شده در شکل زیر در نظر گرفت.
- فرض می‌شود که حرکت این سازه توسط تغییر مکان‌های مجموعه‌ای از نقاط مجزا بر روی سازه تعیین شده باشد:  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_i(t), \dots, u_n(t)$ . در اصل، این نقاط می‌توانند به طور دلخواه بر روی سازه قرار داشته باشند.
- در عمل، انتخاب این نقاط بایستی متناظر با مشخصه‌های خاصی از عوامل فیزیکی که دارای تاثیر عمده هستند (نظیر نحوه توزیع بار، جرم و سختی) صورت گیرد و طوری توزیع شده باشند که شکل تغییر مکان را به طور مناسبی توصیف نمایند.



# تعیین درجات آزادی

- تعداد درجات آزادی (مؤلفه های مستقل تغییرمکان) به نظر تحلیل گر بستگی دارد، اختیار کردن درجات آزادی بیشتر، تقریب بهتری از رفتار دینا میکی را به دست می دهد. ولی در بسیاری از حالات می توان نتایج خوبی را با انتخاب مدلی با دو یا سه درجه آزادی به دست آورد.
- در تیر نشان داده شده در صفحه قبل برای هر نقطه تعیین شده فقط یک مؤلفه تغییرمکان در نظر گرفته شده است. باید توجه نمود که برای هر کدام از این نقاط مؤلفه های تغییرمکانی متعددی را می توان در نظر گرفت، برای مثال  $\partial u / \partial x$  و حرکات طولی را می توان به عنوان درجات آزادی اضافی برای هر نقطه به کار برد.

# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

برای یک سیستم  $n$  درجه آزادی، نظیر سیستم نشان داده شده در شکل قبل، معادله حرکت سیستم را می توان از رابطه تعادل نیروهای مؤثر در هر کدام از درجات آزادی آن به دست آورد، به طور کلی در هر نقطه  $i$  چهار نوع نیرو می تواند وجود داشته باشد:

**الف-** بار خارجی  $p_i(t)$

و نیروهای ناشی از حرکت یعنی :

**ب-** نیروی اینرسی  $f_i$

**ج-** نیروهای میرایی  $f_d$

**د-** نیروهای الاستیک  $f_s$

# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

■ بنابراین برای هر کدام از درجات آزادی، تعادل دینامیکی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases} f_{I_1} + f_{D_1} + f_{S_1} = p_1(t) \\ f_{I_2} + f_{D_2} + f_{S_2} = p_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{I_n} + f_{D_n} + f_{S_n} = p_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

■ یا با به کار بردن بردار نیرو ها به شکل ماتریسی خواهیم داشت:

$$[f_I] + [f_D] + [f_S] = [p(t)] \quad (2)$$

که برای سیستم های یک درجه آزادی متناظر با معادله  $f_I + f_D + f_S = p(t)$  می باشد.



# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

هرکدام از نیروهای مقاوم به سادگی توسط مجموعه‌ای متناسب از ضرایب تاثیر نشان داده می‌شوند. به عنوان مثال با توجه به اینکه نیروهای الاستیک متناسب با تغییر مکان‌ها می‌باشند معادله مجموعه نیروهای الاستیکی عبارتست از:

$$\begin{Bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_2} \\ \vdots \\ f_{s_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\{f_s\} = [k] \{u\} \quad (4)$$

که ماتریس ضرایب سختی  $[k]$  ماتریس سختی سازه نامیده می‌شود (برای مجموعه مؤلفه‌های تغییر مکان‌های مشخص شده) و  $[u]$  بردار تغییر مکان است که بیانگر شکل تغییر مکان سازه می‌باشد.

ضرایب  $k_{ij}$  ضرایب تاثیر سختی نامیده شده و دارای تعریف زیر است:

$K_{ij}$  = نیروی ایجاد شده در راستای درجه آزادی  $i$  بر اثر اعمال تغییر مکان واحد در راستای درجه آزادی  $j$  (وقتی که از تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی جلوگیری شود)

# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

■ اگر فرض شود که میرایی بستگی به سرعت دارد یعنی میرایی از نوع ویسکوز باشد به طور مشابه می توان نیرو های میرایی متناظر با درجات آزادی انتخاب شده را به کمک ضرایب تاثیر میرایی نوشت. در قیاس با معادله (3) معادله مجموعه نیروهای میرایی عبارتست از:

$$\begin{Bmatrix} f_{D_1} \\ f_{D_2} \\ \vdots \\ f_{D_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که  $\dot{u}$  سرعت مربوط به مؤلفه تغییر مکانی  $\dot{u}$  بوده و ضرایب  $c_{ij}$  ضرایب تاثیر میرایی نامیده می شوند.

$c_{ij}$  = نیروی ایجاد شده در راستای درجه آزادی  $i$  بر اثر اعمال سرعت واحد در راستای درجه آزادی  $j$

(در حالیکه سرعت در راستای سایر درجات آزادی صفر باشد)

رابطه (5) را می توان به صورت زیر نیز نشان داد:  $\{f_D\} = [c] \{\dot{u}\}$  (6)

که ماتریس ضرایب میرایی  $[c]$  ماتریس میرایی سازه نامیده می شود (برای درجات آزادی مشخص شده) و  $\{\dot{u}\}$  بردار سرعت می باشد.

# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

نیروهای اینرسی نیز توسط مجموعه‌ای از ضرایب تاثیر بنام ضرایب جرم تعیین می‌گردند. این ضرایب بیانگر رابطه بین شتاب درجات آزادی و نیروهای اینرسی می‌باشند. در قیاس با معادله (3)، نیروهای اینرسی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} f_{I_1} \\ f_{I_2} \\ \vdots \\ f_{I_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که  $\ddot{u}$  شتاب مربوط به مؤلفه تغییر مکانی  $i$  بوده و ضرایب  $m_{ij}$  ضرایب تاثیر جرم نامیده می‌شوند.

$m_{ij}$  = نیروی ایجاد شده در راستای درجه آزادی  $i$  بر اثر اعمال شتاب واحد در راستای درجه آزادی  $j$  (در حالی که شتاب در راستای سایر درجات آزادی صفر باشد)

رابطه (7) را می‌توان به صورت زیر نیز نشان داد:

$$\{f_I\} = [m] \{\ddot{u}\} \quad (8)$$

که ماتریس ضرایب جرم  $[m]$  ماتریس جرم سازه نامیده می‌شود و  $\{\ddot{u}\}$  بردار شتاب می‌باشد، که هر دو برای این مجموعه مشخص از مؤلفه تغییر مکان‌ها تعیین شده‌اند.

# تشکیل معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی

■ با جایگزین کردن معادلات (4)، (6) و (8) در معادله (2) تعادل دینامیکی کل سازه با در نظر گرفتن کلیه درجات آزادی سازه، به دست می آید:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\} \quad (9)$$

■ معادله فوق، معادله حرکت سیستم چند درجه آزادی است که مشابه معادله برای سیستم یک درجه آزادی می باشد.

■ هر کدام از اجزای معادله (9) توسط یک ماتریس مشخص می گردند که درجه این ماتریس ها بستگی به تعداد درجات آزادی به کار رفته برای تغییر مکان های سازه دارد.

■ بنابراین معادله (9) بیان کننده  $n$  معادله حرکت است که برای تعیین واکنش سیستم هایی با چند درجه آزادی به کار می رود.

# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس سختی

برخی خواص مهم ماتریس سختی عبارتند از:

۱- ماتریس سختی ماتریسی متقارن است

(به کمک قانون بتی قابل اثبات است - قانون بتی: کار انجام شده توسط مجموعه ای از نیروها بر روی تغییرمکانی ناشی از یک مجموعه نیروهای دیگر برابر است با کار انجام شده توسط مجموعه

نیروهای دوم بر روی تغییرمکان های ناشی از مجموعه نیروهای اول  $( p_a^T u_b = p_b^T u_a )$

۲- ماتریس سختی ماتریسی مثبت-معین است. ماتریس های مثبت-معین، غیرمنفرد بوده و قابل معکوس کردن هستند.

(با توجه به اینکه انرژی تغییرشکل ذخیره شده در سازه در طی یک تغییرشکل اختیاری  $u$  با  $U = 1/2 u^T k u$  نشان داده می شود و چون این انرژی در یک سازه پایدار همیشه مثبت است

$1/2 u^T k u > 0$  شرط مثبت معین بودن ماتریس سختی  $k$  محقق می گردد)

# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس سختی

## روشهای تعیین ماتریس سختی عبارتند از:

۱- روش مستقیم با استفاده از تعریف ضریب سختی

۲- روش عناصر محدود

## ۱- روش مستقیم تعیین ماتریس سختی:

در مسائل ساده ای نظیر سازه های برشی برای تعیین عناصر ماتریس سختی می توان مستقیماً از تعریف ضریب سختی استفاده کرد.

در این روش به ترتیب در راستای هرکدام از درجات آزادی سازه (درجه آزادی  $i$ ام) تغییر مکان واحد ایجاد کرده و همزمان تغییر مکان در راستای سایر درجات آزادی سازه مقید می گردد، نیروهای پدید آمده در راستای درجات آزادی مختلف سازه نشان دهنده عناصر ستونی خاص از ماتریس سختی (ستون  $i$ ام) خواهند بود، با تکرار این عمل برای سایر درجات آزادی سازه، ماتریس سختی کل سازه به دست می آید.

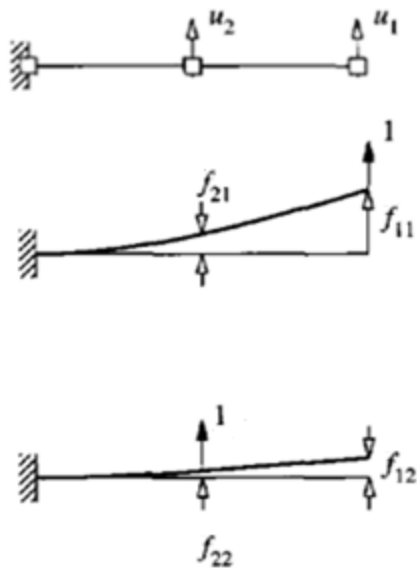


## محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس سختی:

**نکته:** تعیین ماتریس سختی در سازه های معین استاتیکی

در سازه های معین نظیر شکل زیر، معمولا راحت تر است که ابتدا ماتریس نرمی تعیین شده و سپس با معکوس کردن آن، ماتریس سختی به دست آید.

ضریب تاثیر نرمی  $f_{ij}$  عبارتست از تغییرمکان در راستای درجه آزادی  $i$  ام به علت تاثیر نیروی واحد در امتداد درجه آزادی  $j$  ام.



# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس سختی

## ۲- روش عناصر محدود برای تعیین ماتریس سختی

در مسائل پیچیده برای تعیین مشخصات سازه از روش عناصر محدود استفاده می‌شود. در این روش ابتدا سازه به مجموعه‌ای از المان‌های مجزا تقسیم‌بندی می‌شود که این المان‌ها توسط نقاط گرهی محدودی به یکدیگر متصل هستند، ابتدا مشخصه‌های هر کدام از اعضا به طور مجزا محاسبه می‌شود سپس از ترکیب متناسب آنها (به طوری که شرایط تعادل و سازگاری در محل گره‌ها ارضاء گردد) مشخصات کل سازه به دست می‌آید.



# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس جرم

روش های تعیین ماتریس جرم عبارتند از:

۱- روش ماتریس جرم متمرکز

۲- روش ماتریس جرم سازگار

## ۱- ماتریس جرم متمرکز (local mass matrix)

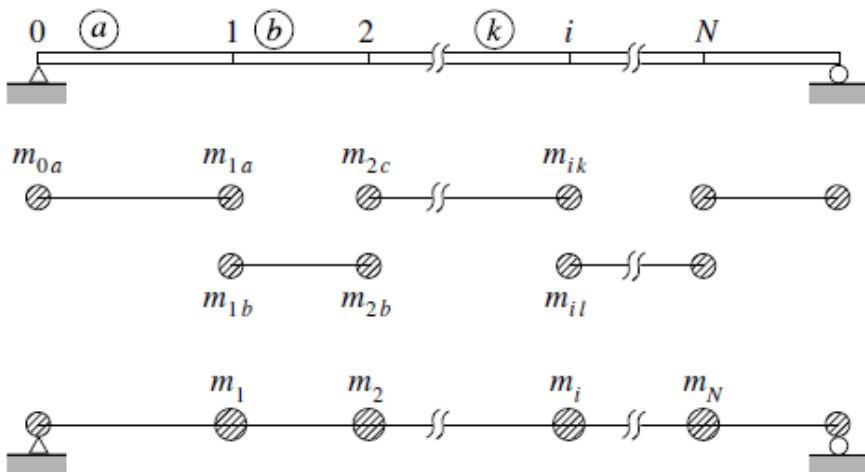
- ساده ترین روش برای تعیین مشخصه های جرم در هر سازه ای، فرض متمرکز بودن جرم در نقاطی است که تغییر مکان های آن نقاط مورد نیاز می باشد.
- طبق روش متداول برای تعیین جرم متمرکزی که بایستی در هر گره در نظر گرفته شود، فرض می گردد که سازه به قطعاتی تقسیم شده باشد و گره ها در نقاط اتصال این قطعات به یکدیگر باشند.

# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس جرم

■ شکل زیر ، کاربرد این روش را برای سازه ای از نوع تیر نشان می دهد.

■ جرم هر قطعه به صورت جرم های متمرکز نقطه ای در گره های دو انتهای آن فرض شده است، توزیع جرم قطعات در این نقاط، از محاسبات استاتیک تعیین می گردد. بنابراین، جرم کل متمرکز در هر گره از سازه، برابر با مجموع سهمی از جرم هایی است که از هر قطعه متصل به آن گره می رسد. در سیستم نشان داده شده در شکل زیر ، قسمتی از جرم های دو قطعه به جرم هر گره

توزیع می گردد بعنوان مثال  $m_1 = m_{1a} + m_{1b}$



نمایش نحوه متمرکز کردن جرم در گره ها

## محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس جرم

22

■ در روش ماتریس جرم متمرکز جملات غیرقطری ماتریس  $m_{ij}$  همگی صفر هستند، زیرا شتاب هر جرم نقطه ای باعث ایجاد نیروی اینرسی فقط در آن نقطه می گردد. واضح است که نیروی اینرسی نقطه  $i$  بر اثر شتاب واحد در نقطه  $i$  برابر با جرم متمرکز در همان نقطه است، بنابراین در یک سیستم با جرم متمرکز ضریب تاثیر جرم  $m_{ii}$  برابر با  $m_i$  می باشد (و  $m_{ij}=0$  خواهد بود به ازای  $i \neq j$ ).

■ در سیستمی که فقط درجات آزادی تغییرمکانی جانبی برای آن تعیین شده باشد، ماتریس جرم متمرکز بصورت قطری خواهد بود برای تیر مزبور خواهیم داشت:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

که دارای جملاتی به تعداد درجات آزادی می باشد.

## محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس جرم

- هرگاه درهرگره بیش از یک درجه آزادی جابجایی در نظر گرفته شده باشد، جرم آن نقطه در هر کدام از درجات آزادی مذکور مشارکت خواهد داشت.
- از طرف دیگر به علت فرض تمرکز جرم در نقاط، اینرسی چرخشی وجود نخواهد داشت و جرم متناظر با هر یک از درجات آزادی چرخشی صفر خواهد بود (البته اگر یک جرم صلب دارای اینرسی چرخشی معینی در رابطه با درجه آزادی چرخشی باشد، ضریب قطری برای آن درجه آزادی، اینرسی چرخشی جرم خواهد بود).
- بنابراین ماتریس جرم متمرکز یک ماتریس قطری خواهد بود که در حالت کلی شامل جملات قطری صفر برای درجات آزادی چرخشی می باشد .

## محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس جرم

### ۲- ماتریس جرم سازگار (consistent mass matrix):

- با استفاده از مفهوم المان محدود، می توان توسط روشی مشابه با آنالیز ضرایب سختی اعضا، ضرایب تاثیر جرم اعضای یک سازه را محاسبه نمود.
- پس از اینکه ضرایب جرم اعضا یک سازه محاسبه گردید، ماتریس جرم کل سرهم بندی شده، دقیقاً از همان روش ترکیب بکار رفته در محاسبه ماتریس سختی سازه از سختی اعضا، بدست می آید.
- ماتریس جرم سازه دارای همان شکل ماتریس سختی خواهد بود، یعنی دارای جملات غیر صفر متناظر با ماتریس سختی می باشد.

# محاسبه ماتریس های مشخصه های سازه ای - ماتریس میرایی

- ماتریس میرایی معمولا از روی نسبت های میرایی داده شده محاسبه می شود (چون عملا محاسبه ضریب میرایی  $C$ ، یا هر مشخصه خاص دیگری از میرایی غیر قابل انجام است).
- توضیحات مربوط به نحوه تعیین ماتریس میرایی در فصل جداگانه ای ارائه خواهد گردید.

سیستم‌های چند درجه آزادی را به سه دسته زیر می‌توان تقسیم بندی کرد:

LOCAL MASS, LUMPED STIFFNESS

۱- جرم متمرکز و سختی متمرکز

DISTRIBUTED MASS, LUMPED STIFFNESS

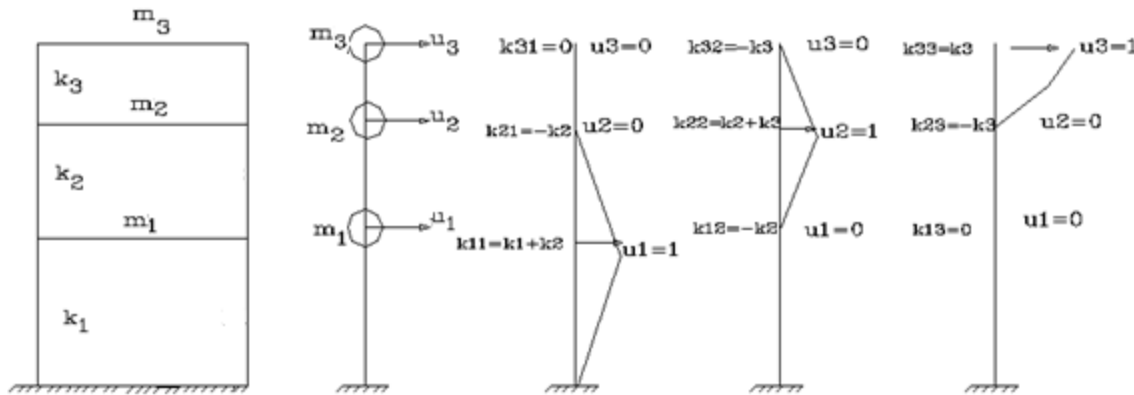
۲- جرم پیوسته و سختی متمرکز

DIST MASS, FIST STIFNESS

۳- جرم پیوسته و سختی پیوسته

# ۱- سیستم های چند درجه آزادی با جرم متمرکز و سختی متمرکز

**مثال:** تعیین ماتریس های سختی و جرم برای سازه برشی (shear structure)



با استفاده از روش مستقیم تعیین ماتریس سختی خواهیم داشت:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

و با استفاده از روش ماتریس جرم متمرکز خواهیم داشت:

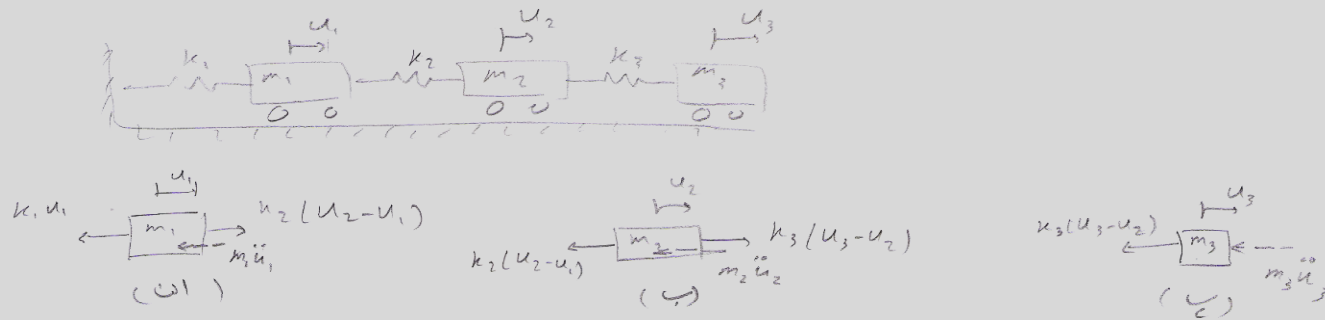
$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$





# ۱- سیستم های چند درجه آزادی با جرم متمرکز و سختی متمرکز

حل به روش متادله مستقیم



$$(a) \text{ ماسه } m_1 \text{ متادله} \rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) = 0 \rightarrow m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = 0$$

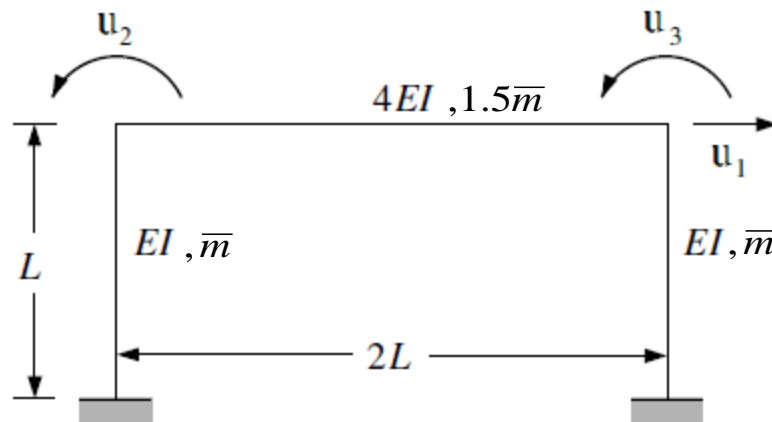
$$(b) \text{ ماسه } m_2 \text{ متادله} \rightarrow m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) - k_3 (u_3 - u_2) = 0 \rightarrow m_2 \ddot{u}_2 + (-k_2) u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 = 0$$

$$(c) \text{ ماسه } m_3 \text{ متادله} \rightarrow m_3 \ddot{u}_3 + k_3 (u_3 - u_2) = 0 \rightarrow m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# ۱- سیستم های چند درجه آزادی با جرم متمرکز و سختی متمرکز

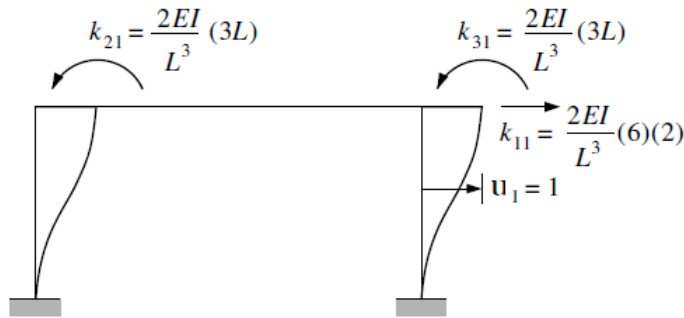
**مثال:** تعیین ماتریس های سختی و جرم سازه قاب ساده (با صرف نظر از تغییر طول محوری اعضا)



■ اگر از تغییر طول محوری اعضا صرف نظر شود این سازه دارای سه درجه آزادی خواهد بود که در شکل فوق نشان داده شده است.

■ ضرایب سختی مربوطه را می توان بطور متوالی با اعمال یک تغییر مکان واحد به هر یک از درجات آزادی و مقید کردن حرکت دو درجه آزادی دیگر و تعیین نیروهای ایجاد شده، بدست آورد.

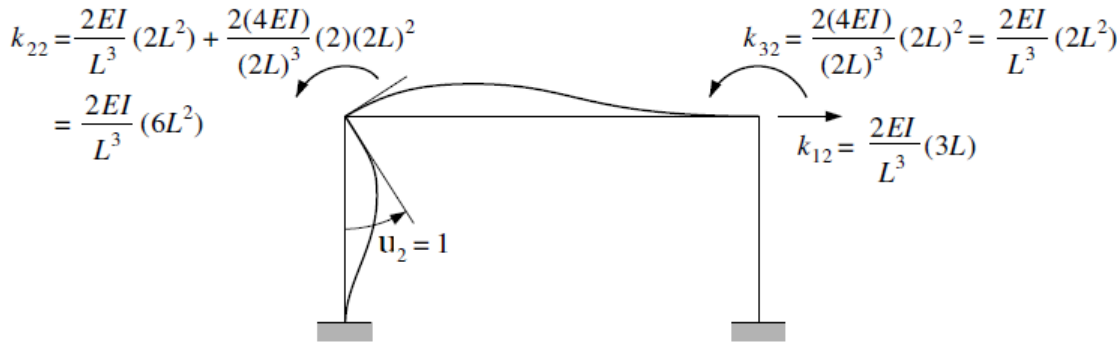
# ۱- سیستم های چند درجه آزادی با جرم متمرکز و سختی متمرکز



$$k_{11} = 2 \times \frac{12EI}{l^3} = \frac{24EI}{l^3}$$

$$k_{21} = \frac{6EI}{l^2}$$

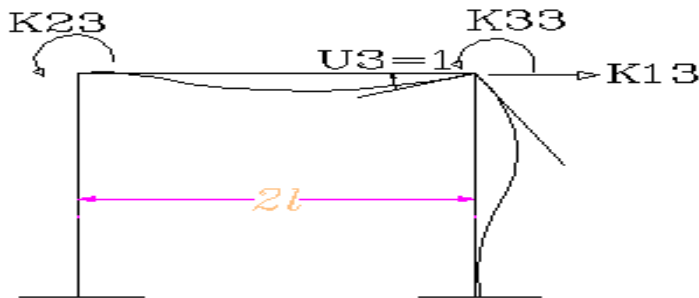
$$k_{31} = \frac{6EI}{l^2}$$



$$k_{12} = \frac{6EI}{l^2}$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{l} + \frac{4E(4I)}{2l} = \frac{12EI}{l}$$

$$k_{32} = \frac{2E(4I)}{2l} = \frac{4EI}{l}$$



$$k_{13} = \frac{6EI}{l^2}$$

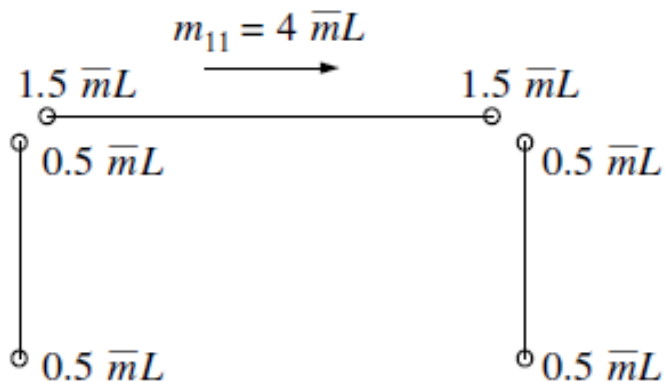
$$k_{23} = \frac{2E(4I)}{2l} = \frac{4EI}{l}$$

$$k_{33} = \frac{4EI}{l} + \frac{4E(4I)}{2l} = \frac{12EI}{l}$$

# ۱- سیستم های چند درجه آزادی با جرم متمرکز و سختی متمرکز

پس ماتریس سختی عبارت خواهد بود از:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l} & \frac{4EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{12EI}{l} \end{bmatrix}$$



■ برای تعیین ماتریس جرم این سازه از روش جرم متمرکز استفاده می شود در این حالت همانطور که در شکل مقابل نشان داده شده است نصف جرم هر عضو در انتهای آن متمرکز شده است.

■ بنابراین جرمی که هم سطح با تیر اصلی برای درجه آزادی جنبی در نظر گرفته می شود و با  $m_n$  نشان داده می شود مساوی مجموع چهار جرم است.

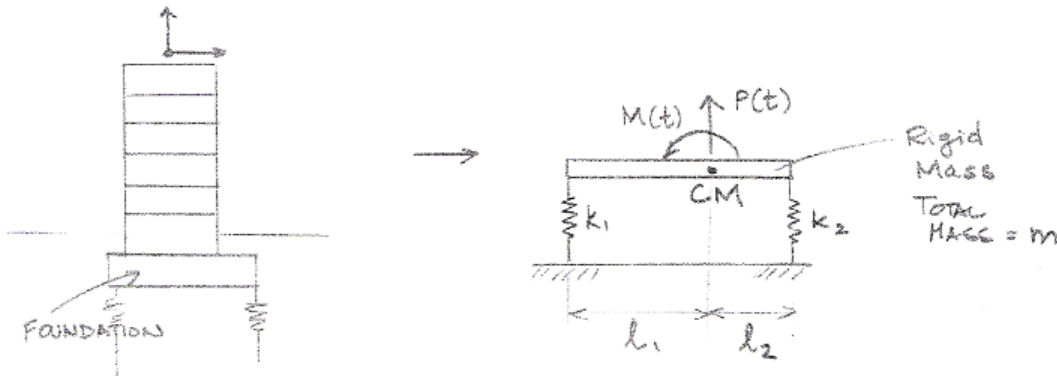
$$[m] = \begin{bmatrix} 4\bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■ هیچ ضریب جرم دیگری نظیر درجات آزادی دورانی وجود ندارد زیرا جرمهای نقطه ای فاقد اینرسی دورانی هستند.

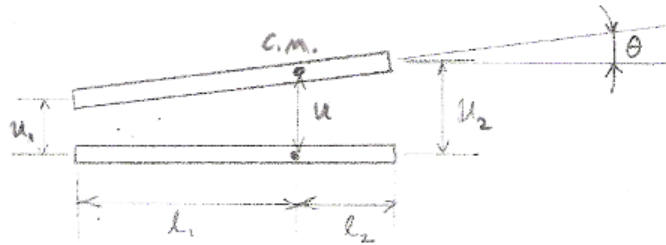
## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

33

مثال: ارتعاش ساختمان روی پی ارتجاعی



■ تعیین درجات آزادی



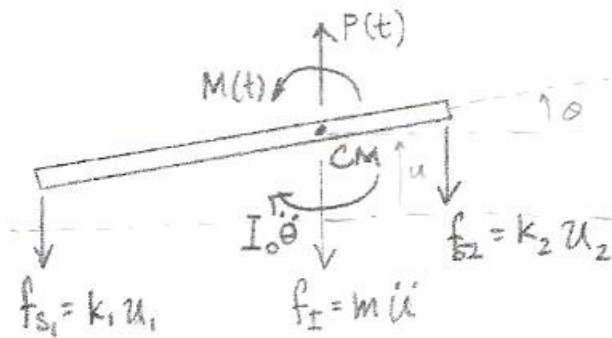
در صورت انتخاب  $u$  و  $\theta$  مطابق شکل به عنوان درجات آزادی سیستم، سایر مقادیر تغییر مکان بر حسب این پارامترها عبارت خواهند بود از:

$$u_1 = u - l_1 \theta$$

$$u_2 = u + l_2 \theta$$

## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

■ استخراج معادلات حرکت به روش تعادل مستقیم (اصل دالامبر):



$I_0$  ممان اینرسی جرمی حول مرکز جرم

$$\sum F_y = 0$$

$$\begin{aligned} P(t) &= k_1 u_1 + k_2 u_2 + m\ddot{u} = (k_1 u - k_1 l_1 \theta) + (k_2 u + k_2 l_2 \theta) + m\ddot{u} \\ &= m\ddot{u} + (k_1 + k_2)u + (k_2 l_2 - k_1 l_1)\theta \end{aligned}$$

$$\sum M_{/CM} = 0$$

$$\begin{aligned} M(t) &= I_0 \ddot{\theta} - k_1 u_1 l_1 + k_2 u_2 l_2 \\ &= I_0 \ddot{\theta} + (k_2 l_2 - k_1 l_1)u + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)\theta \end{aligned}$$

## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

با نوشتن دو معادله فوق به شکل ماتریسی خواهیم داشت :

$$\begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2 \\ -k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2 & k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$   
*uncoupled* (کلیه عناصر غیر واقع بر قطر اصلی برابر با صفر هستند)

$\uparrow$   
*coupled*

$$\{p\} = [m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\}$$

- درگیر بودن معادلات سیستم بستگی به انتخاب درجات آزادی مورد استفاده برای تشریح حرکت دارد.
- در صورتی که نیروهای خارجی وارده در امتداد درجات آزادی عمل ننمایند لازم خواهد بود با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی یا به کمک اصل تغییرمکانهای مجازی (بر مبنای تساوی کارمجازی انجام شده توسط نیروهای واقعی وارده و نیروهای معادل گرهی در طی تغییرمکان مجازی در راستای هر کدام از درجات آزادی سیستم، مطابق مثال ۹-۲ Chopra) به نیروهایی در امتداد درجات آزادی تبدیل شوند.



## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

36

■ استخراج معادلات حرکت به واسطه تعیین ماتریس های جرم و سختی به روش مستقیم:

الف- محاسبه ضرایب تاثیر سختی:

The image shows two diagrams of a beam of total length  $l_1 + l_2$  supported by two springs with stiffnesses  $k_1$  and  $k_2$ . The center of mass is at a distance  $c.m.$  from the left end.

**Top Diagram:** Shows a unit displacement  $U=1$  at the center of mass. The reaction forces at the springs are  $k_1$  and  $k_2$ . The stiffness coefficients are  $k_{UU}$  (vertical displacement) and  $k_{\theta U}$  (rotation).

Equations for the top diagram:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow k_{UU} = k_1 + k_2$$

$$\sum M_{c.m.} = 0 \rightarrow k_{\theta U} = k_2 l_2 - k_1 l_1$$

**Bottom Diagram:** Shows a unit rotation  $\theta=1$  at the center of mass. The reaction forces at the springs are  $k_1 l_1$  and  $k_2 l_2$ . The stiffness coefficients are  $k_{U\theta}$  (vertical displacement) and  $k_{\theta\theta}$  (rotation).

Equations for the bottom diagram:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow k_{U\theta} = k_2 l_2 - k_1 l_1$$

$$\sum M_{c.m.} = 0 \rightarrow k_{\theta\theta} = k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2$$

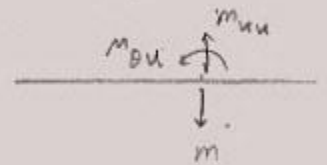
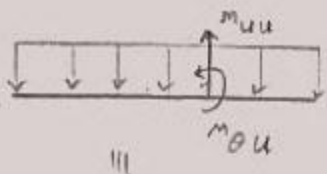
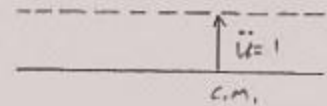
The final stiffness matrix is given as:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}$$

## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

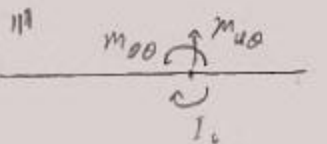
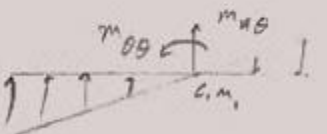
37

ب - محاسبه ضرایب تاثیر جرم:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow m_{uu} = m$$

$$\sum M_{c.m.} = 0 \rightarrow m_{\theta u} = 0$$

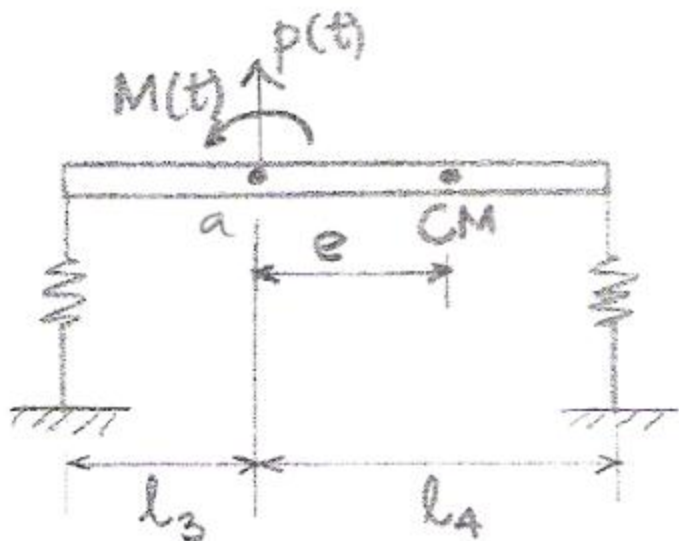


$$\sum F_y = 0 \rightarrow m_{\theta\theta} = 0$$

$$\sum M_{c.m.} = 0 \rightarrow m_{\theta\theta} = I_0$$

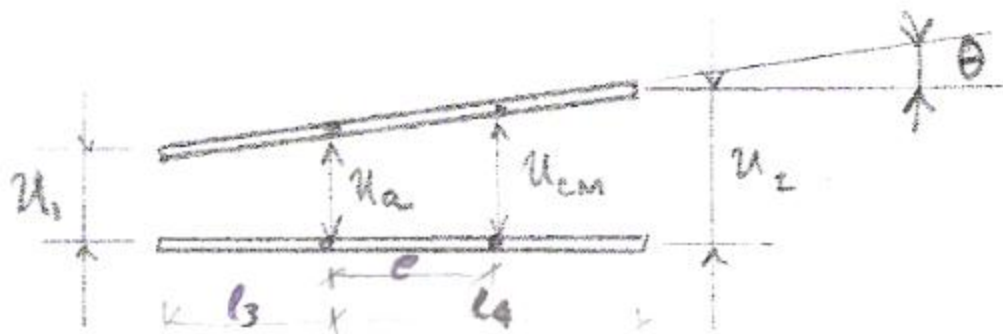
$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز



در سیستم هایی که دارای جرم پیوسته هستند همیشه ماتریس جرم غیردرگیر نخواهد بود.

مثلا در سازه شکل مقابل در صورتی که درجات آزادی مستقل حرکت  $u_a$  و  $\theta$  در نظر گرفته شوند خواهیم داشت:



$$u_{CM} = u_a + e\theta$$

$$u_1 = u_a - l_3\theta$$

$$u_2 = u_a + l_4\theta$$

## ۲- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی متمرکز

استخراج معادلات حرکت به روش تعادل مستقیم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow P(t) = m\ddot{u}_{CM} + k_1 u_1 + k_2 u_2$$

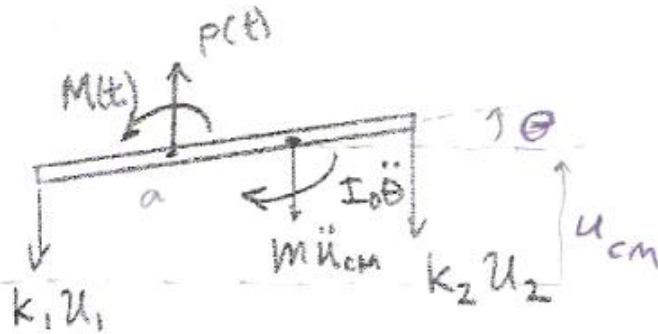
$$\sum M_{/a} = 0 \rightarrow M(t) = I_0 \ddot{\theta} + me\ddot{u}_{CM} - k_1 u_1 l_3 + k_2 u_2 l_4$$

$$\begin{cases} P(t) = m\ddot{u}_{CM} + k_1(u_a - l_3\theta) + k_2(u_a + l_4\theta) \\ M(t) = I_0 \ddot{\theta} + me\ddot{u}_{CM} - k_1(u_a - l_3\theta)l_3 + k_2(u_a + l_4\theta)l_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{u}_a + me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)u_a + (-k_1 l_3 + k_2 l_4)\theta = P(t) \\ me\ddot{u}_a + (I_0 + me^2)\ddot{\theta} + (-k_1 l_3 + k_2 l_4)u_a + (k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2)\theta = M(t) \end{cases}$$

با نوشتن دو معادله فوق به شکل ماتریسی خواهیم داشت:

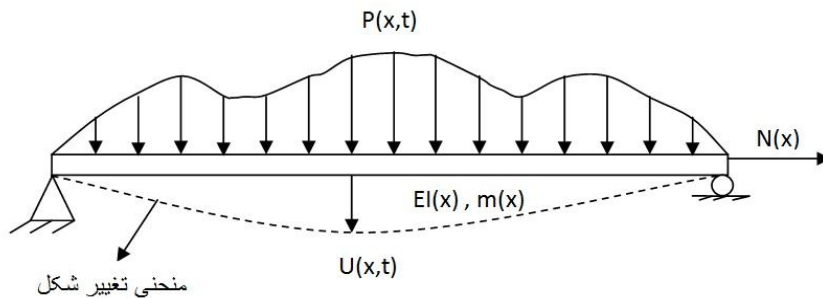
$$\begin{Bmatrix} P(t) \\ M(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & me \\ me & I_0 + me^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_3 + k_2 l_4 \\ -k_1 l_3 + k_2 l_4 & k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ \theta \end{Bmatrix}$$



## ۳- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی پیوسته

40

### معادلات حرکت سیستم های پیوسته



- از لحاظ تئوریک سیستم های با پارامترهای پیوسته دارای بی نهایت درجه آزادی هستند و با معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) مدل سازی می شوند.
- تیری مطابق شکل در نظر گرفته می شود، شرایط تکیه گاهی تیر دلخواه می باشد که در اینجا صرفاً بخاطر سهولت نمایش به صورت تکیه گاه ساده نشان داده شده است.
- بارهای وارده شامل:

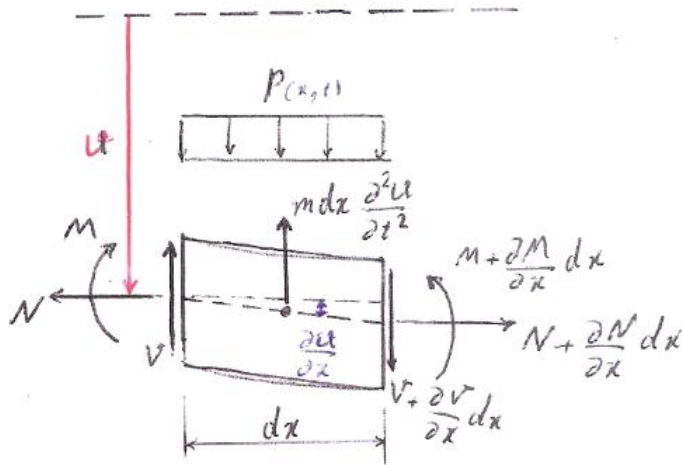
- بارگذاری قائم  $p(x,t)$ ، که متغیر نسبت به زمان و موقعیت می باشد

- نیروی محوری  $N(x)$ ، که ثابت نسبت به زمان و متغیر نسبت به موقعیت فرض می شود، در

ضمن فرض می شود جهت نیروی محوری بر اثر تغییر مکان تیر تغییر نمی کند

### ۳- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی پیوسته

معادله حرکت این سیستم ساده را می توان از طریق نوشتن رابطه تعادل نیروهای وارد بر یک المان دیفرانسیلی تیر بدست آورد:



رابطه تعادل نیروهای قائم عبارت است از:

$$+\uparrow \sum F = 0 \rightarrow V - (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) + m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p dx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -p + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (i)$$

رابطه تعادل لنگرها حول محور الاستیک، نسبت به قسمت چپ المان، عبارت است از:

$$\curvearrowleft + \sum M = 0 \rightarrow M - (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) + (V + \frac{\partial V}{\partial x} dx) dx - (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) \frac{\partial u}{\partial x} dx + p dx \frac{dx}{2} - m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{dx}{2} = 0$$

### ۳- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی پیوسته

42

با صرف نظر نمودن از عوامل مرتبه بالای  $(dx)^2$  و  $(dx)^3$  ... و سپس تقسیم طرفین رابطه بر  $dx$  نتیجه می شود:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + V - N \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

با استفاده از رابطه  $M = -EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  و با گرفتن مشتق ضمنی نسبت به  $x$  داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + V - N \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (N \frac{\partial u}{\partial x}) = 0$$

و با استفاده از رابطه (i) نتیجه می شود:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (N \frac{\partial u}{\partial x}) = p$$

معادله حرکت (strong form)

### ۳- سیستم های چند درجه آزادی با جرم پیوسته و سختی پیوسته

بر اساس اصل تغییرمکانهای مجازی برای این سیستم در حال تعادل، کل کار مجازی انجام شده در خلال تغییرمکان مجازی  $\delta u$  باید برابر با صفر باشد:

$$\int_0^L \delta u \left( m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (N \frac{\partial u}{\partial x}) - p(x, t) \right) dx = 0$$

با دو مرتبه انتگرالگیری جزءبجزء از جمله دوم و یک مرتبه انتگرالگیری جزءبجزء از جمله سوم عبارت فوق نتیجه می شود:

$$\int_0^L \delta u \left( m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t) \right) dx + \int_0^L \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) dx + \int_0^L \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} (N \frac{\partial u}{\partial x}) dx + \left[ \delta u \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) - \delta u (N \frac{\partial u}{\partial x}) \right]_0^L = 0$$

در معادله فوق جملات داخل کروشه برابر صفر هستند چون تغییرات در مرزها صفر می شود (برای ارضای شرایط مرزی)، بنا براین نتیجه می شود:

$$\int \delta u \left( m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x, t) \right) dx + \int \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) dx + \int \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} (N \frac{\partial u}{\partial x}) dx = 0 \quad (ii)$$

معادله حرکت (weak form)



# تقریب سازی سیستم پیوسته بی نهایت درجه آزادی با سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود

- در عمل سیستم پیوسته به صورت سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود ایده آل سازی می شود.
- معادلات حرکت با جمع آثار توابع شکل (Shape functions) بیان می گردد.
  - توابع شکل را توابع درونیابی نیز می نامند چون مشخص کننده شکل تغییرمکان بین گرهها می باشند.
  - توابع شکل به نحوی انتخاب می شوند که بیانگر شکل تغییرمکان سازه باشند.
  - این توابع باید یکتا (مستقل) unique باشند.
  - توابع شکل باید شرایط مرزی را ارضا نمایند، هر شکل منحنی دلخواهی که شرایط پیوستگی داخلی و گرهی را ارضا نماید قابل قبول است.
  - در المانهای یک بعدی، یک انتخاب مناسب برای تابع شکل عبارت است از منحنی تغییرشکل به ازای اعمال تغییرمکان واحد در درجه آزادی مزبور و مقید نمودن سایر درجات آزادی.

# تقریب سازی سیستم پیوسته بی نهایت درجه آزادی با سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود

مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته،  $u_i$ ، تعریف می‌شود. مقادیر  $u_i$  مجهولات مسأله و به عبارتی درجات آزادی سیستم خواهند بود (دامنه تغییر مکان نقاط انتخابی خاصی از سازه)

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \psi_i(x) = u_1(t) \psi_1(x) + u_2(t) \psi_2(x) + \dots$$

تابع شکل نظیر درجه آزادی  $i$  ام  $\psi_i(x)$

با اعمال تقریب سازی ذیل در شکل ضعیف معادله حرکت (رابطه ii) خواهیم داشت:

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \psi_j(x)$$

$$\delta u(x, t) = \sum_i \delta u_i(t) \psi_i(x)$$

$$\int \left( \sum_i \delta u_i \psi_i \right) \left[ m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_j u_j \psi_j \right) - p(x, t) \right] dx + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_i \delta u_i \psi_i \right) \left[ EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_j u_j \psi_j \right) \right] dx +$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_i \delta u_i \psi_i \right) \left[ N \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_j u_j \psi_j \right) \right] dx = 0$$

# تقریب سازی سیستم پیوسته بی‌نهایت درجه آزادی با سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود

$$\sum_i \delta u_i \left\{ \sum_j \ddot{u}_j \int \psi_i m \psi_j dx \right\} - \sum_i \delta u_i \left\{ \int \psi_i p(x,t) dx \right\} + \sum_i \delta u_i \left\{ \sum_j u_j \int \psi_i'' EI \psi_j'' dx \right\} + \sum_i \delta u_i \left\{ \sum_j u_j \int \psi_i' N \psi_j' dx \right\} = 0$$

$$\sum_i \delta u_i \left\{ \sum_j \ddot{u}_j(t) \int \psi_i(x) m \psi_j(x) dx + \sum_j u_j(t) \int \psi_i'' EI \psi_j'' dx + \sum_j u_j(t) \int \psi_i' N \psi_j' dx - \int \psi_i p(x,t) dx \right\} = 0$$

با فرض:

$$\text{if} : \begin{cases} \delta u_i = 1 \\ \delta u_j = 0 \quad j \neq i \end{cases}$$

به عبارت دیگر با فرض اینکه  $\delta u = \psi_i(x)$  یعنی تغییر مکان مجازی به صورت تابع شکل  $\psi_i(x)$  در نظر گرفته شود داریم:

$$\sum_j \ddot{u}_j(t) \int \psi_i(x) m \psi_j(x) dx + \sum_j u_j(t) \int \psi_i'' EI \psi_j'' dx + \sum_j u_j(t) \int \psi_i' N \psi_j' dx = \int \psi_i p(x,t) dx$$

$$m_{ij} = \int \psi_i(x) m(x) \psi_j(x) dx \quad \text{ضریب تاثیر جرم}$$

$$k_{ij} = \int \psi_i''(x) EI(x) \psi_j''(x) dx \quad \text{ضریب تاثیر سختی}$$

$$k_{ij}^G = \int \psi_i'(x) N(x) \psi_j'(x) dx \quad \text{ضریب تاثیر سختی هندسی}$$

$$p_i = \int \psi_i(x) p(x,t) dx \quad \text{بار تعمیم یافته}$$

# تقریب سازی سیستم پیوسته بی نهایت درجه آزادی با سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{u}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij}^G u_j(t) = p_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^G & k_{12}^G & \cdots & k_{1n}^G \\ k_{21}^G & k_{22}^G & \cdots & k_{2n}^G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}^G & k_{n2}^G & \cdots & k_{nn}^G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix}$$

=n تعداد توابع شکل = تعداد درجات آزادی

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + ([k] + [k^G])\{u(t)\} = \{p(t)\}$$

# تقریب سازی سیستم پیوسته بی نهایت درجه آزادی با سیستمی با تعداد درجات آزادی محدود

توجه:

■ در صورتی که نیروی محوری کششی باشد مثبت می باشد. اگر نیروی محوری فشاری باشد  $N$  منفی بوده و باعث کاهش سختی سیستم می شود.

■ مشخصه های میرایی: در صورتی که  $c(x)$  بیانگر میرایی ویسکوز پیوسته باشد ضریب تأثیر میرایی با رابطه زیر قابل بیان خواهد بود:

$$c_{ij} = \int \psi_i(x) c(x) \psi_j(x) dx$$

پس از تعیین ضرایب تأثیر میرایی  $c_{ij}$  می توان ماتریس میرایی کل سازه  $[c]$  را بدست آورد. با این وجود عملاً محاسبه میرایی  $c(x)$  غیرقابل انجام است، به همین دلیل بجای محاسبه ماتریس میرایی  $[c]$  به طریق فوق، معمولاً آن را از روی نسبت های میرایی تعیین می کنند.

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

■ در روش عناصر محدود:

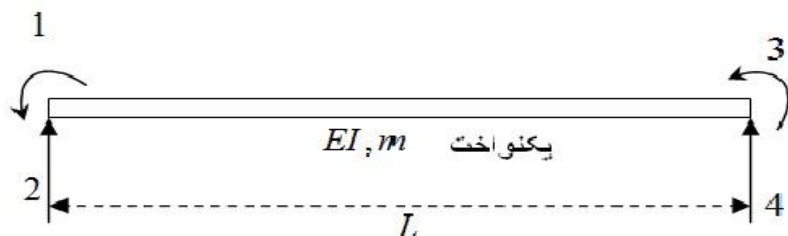
- ✓ سازه به مجموعه‌ای از عناصر مجزا تقسیم‌بندی می‌شود که توسط نقاط گرهی محدودی به یکدیگر متصل می‌باشند.
- ✓ تغییرمکانهای این گره‌ها به عنوان مختصات تعمیم یافته سازه (درجات آزادی) در نظر گرفته می‌شوند.
- ✓ با تعریف توابع شکل مناسب روابطی کلی برای تعیین مشخصه‌های دینامیکی (نظیر ماتریس جرم و سختی و بردار نیرو) یک عنصر نمونه بدست می‌آید.
- ✓ مشخصه‌های دینامیکی تک تک عناصر بطور مجزا محاسبه شده سپس از ترکیب مناسب آنها مشخصات سازه کل حاصل می‌گردد.
- ✓ دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل حل می‌گردد.

■ بنابراین یکی از گامهای اساسی در روش عناصر محدود فرمولبندی مشخصه‌های دینامیکی عنصر نمونه می‌باشد زیرا فرمولبندی عنصر نمونه‌ای تحت عنوان تیراولر **Euler Beam** که در تحلیل دینامیکی سازه‌های تیری و قابی قابل استفاده است به عنوان مثال شرح داده می‌شود.

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

50

## مثال: تیر اولر Euler Beam



■ تغییرمکان قائم و چرخش در دو گره انتهایی این عنصر به عنوان چهار درجه آزادی آن در نظر گرفته می شوند.

■ پس از تعیین توابع متناظر با این مختصات تعمیم یافته، تغییرمکان در هر نقطه از این عنصر را در هر لحظه به کمک این توابع درونیابی می توان بر حسب تغییرمکان های گرهی نوشت:

$$u(x, t) = u_1(t)\psi_1(x) + u_2(t)\psi_2(x) + u_3(t)\psi_3(x) + u_4(t)\psi_4(x)$$

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

## تعیین توابع شکل:

هر یک از توابع شکل بدین صورت تعیین می‌گردد که تغییر مکان واحد در راستای درجه آزادی مورد نظر اعمال شده و سایر درجات آزادی مقید می‌گردد، شکل منحنی تغییر شکل یافته در این حالت به عنوان تابع شکل در نظر گرفته می‌شود.





# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

شکل کلی معادله دیفرانسیلی حاکم بر تغییر مکان تیر در چنین حالتی به صورت زیر خواهد بود:

$$EI \frac{d^4 \psi}{dx^4} = q(x) = 0 \rightarrow \psi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

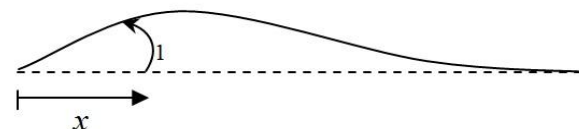
ثابت‌های  $D, C, B, A$  بر اساس شرایط مرزی، در هر حالت، محاسبه می‌شوند.

محاسبه تابع شکل  $\psi_1(x)$ :

ثابت‌های  $D, C, B, A$  در عبارت  $\psi(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  بر اساس شرایط مرزی زیر محاسبه می‌شوند

$$x=0 \begin{cases} \psi_1 = 0 \rightarrow A \times 0 + B \times 0 + C \times 0 + D = 0 \rightarrow D = 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 1 \rightarrow 3A \times 0 + 2B \times 0 + C = 1 \rightarrow C = 1 \end{cases}$$

$$x=L \begin{cases} \psi_1 = 0 \rightarrow AL^3 + BL^2 + 1L + 0 = 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \rightarrow 3AL^3 + 2BL + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{L^2} \\ B = -\frac{2}{L} \end{cases}$$



# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

$$\psi_1(x) = \frac{1}{L^2} x^3 + \left(\frac{-2}{L}\right)x^2 + 1x + 0 = x\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} + 1\right)$$

$$\psi_1(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

و به همین ترتیب اقدام به محاسبه سه تابع شکل دیگر می شود:

$$\psi_2(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

$$\psi_4(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

این توابع چندجمله ای های درجه سه هرمیتی می باشند.

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

■ تعیین ماتریس‌های سختی:

$$k_{ij} = \int_0^L \psi_i''(x) EI \psi_j''(x) dx$$

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 2L^2 & -6L \\ 6L & 12 & 6L & -12 \\ 2L^2 & 6L & 4L^2 & -6L \\ -6L & -12 & -6L & 12 \end{bmatrix}$$

$$k_{ij}^G = \int_0^L \psi_i'(x) N \psi_j'(x) dx$$

$$[k^G] = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 4L^2 & 3L & -L^2 & -3L \\ 3L & 36 & 3L & -36 \\ -L^2 & 3L & 4L^2 & -3L \\ -3L & -36 & -3L & 36 \end{bmatrix}$$

نیروی محوری کششی با علامت مثبت در روابط فوق وارد شده، باعث افزایش سختی سیستم می‌گردد و نیروی محوری فشاری با علامت منفی باعث کاهش سختی سیستم می‌شود.

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

■ تعیین ماتریس جرم:

الف- ماتریس جرم سازگار

$$m_{ij} = \int_0^L \psi_i(x) \bar{m} \psi_j(x) dx$$

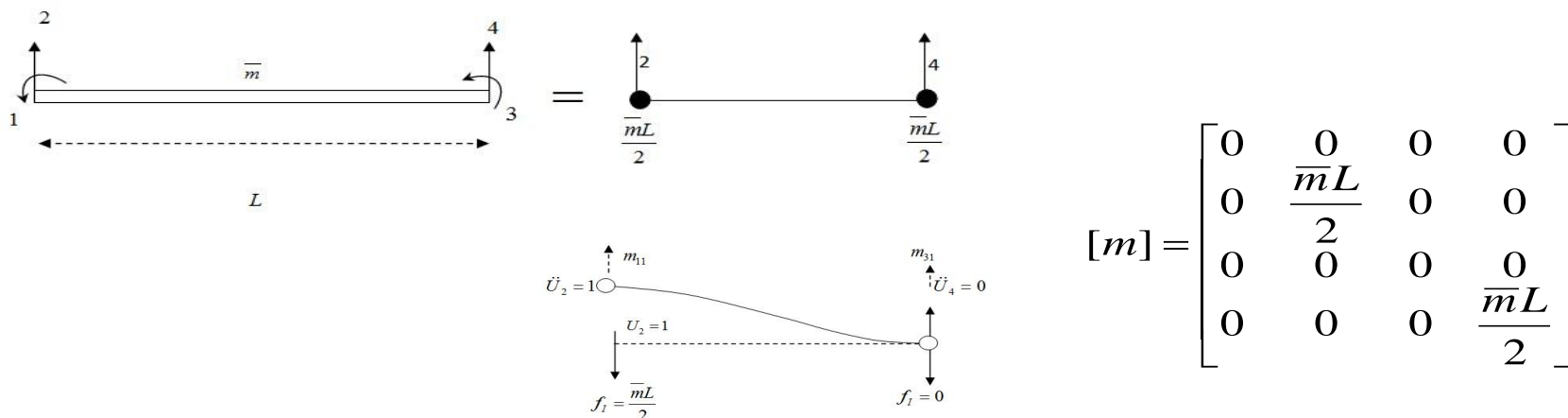
$$[m] = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 4L^2 & 22L & -3L^2 & 13L \\ 22L & 156 & -13L & 54 \\ -3L^2 & -13L & 4L^2 & -22L \\ 13L & 54 & 22L & 156 \end{bmatrix}$$

در متون به این ماتریس، ماتریس جرم سازگار (Consistent Mass Matrix) گفته می‌شود (زیرا از توابع شکل مشابهی برای  $[k]$  و  $[m]$  استفاده شده است).

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

## ب- ماتریس جرم متمرکز (Lumped Mass Matrix) :

همانطور که قبلاً اشاره شد یک روش ساده برای تعیین ماتریس جرم، فرض متمرکز نمودن جرم المان در نقاط گرهی که تغییر مکان های آنها مورد نیاز است، می باشد.



در این روش جرم در درجات آزادی معینی (محدودی) متمرکز می شود (فقط درجات آزادی انتقالی).

مزایای عمده این روش برای تعیین ماتریس جرم عبارتند از: ۱-سادگی ، ۲- دقیق بودن نسبی

# تشکیل معادلات حرکت به روش عناصر محدود

## تعیین بردار بار:

عناصر این بردار براساس نحوه تغییرات بار در طول تیر به کمک رابطه زیر قابل تعیین خواهند بود.

$$P_i = \int \psi_i(x) P(x, t) dx$$

فصل ششم - قسمت دوم:

حل معادله دیفرانسیل حرکت سیستم های چند درجه آزادی

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

■ برای حل معادله دیفرانسیل ماتریسی حرکت

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\}$$

مانند هر معادله دیفرانسیل دیگر، می باید آن را در ابتدا بدون طرف ثانی حل نمود.

■ معادلات حرکت یک سیستم بدون میرایی دارای ارتعاش آزاد را می توان از حذف کردن ماتریس میرایی و بردار بارگذاری در معادله فوق بدست آورد:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \quad (1)$$

که  $\{0\}$  نشانگر بردار صفر می باشد.

■ در مورد اثر میرایی لازم به تذکر است که اولاً تأثیر میرایی در نتایج حاصل اندک بوده و ثانياً با توجه به دخالت اعداد مختلط در این حالت بر پیچیدگی محاسبات و مشکلات آن افزوده می شود.



# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

■ در قیاس با سیستم های یک درجه آزادی، می توان فرض نمود که حرکت ارتعاش آزاد سیستم به صورت هارمونیک ساده می باشد، که در یک سیستم چند درجه آزادی آن را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\{u(t)\} = \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) \quad (2)$$

در این رابطه  $\{\hat{u}\}$  بیانگر شکل ارتعاش سیستم است (که شکل آن با زمان تغییر نمی کند و فقط دامنه آن متغیر است) و  $\theta$  زاویه فاز می باشد.

**تذکر:** حرکت هر جرم یک سیستم چند درجه آزادی یک حرکت هارمونیک ساده نیست اما ممکن است یک ساختمان ایده آل چند طبقه یک حرکت هارمونیک ساده داشته باشد مشروط بر اینکه ارتعاش آزاد آن با توزیع مناسب جابجائی ها یا سرعت ها در ارتفاع ساختمان همراه باشد.

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

■ با گرفتن مشتق دوم معادله (2)، شتابهای ارتعاش آزاد به دست می آیند:

$$\{\ddot{u}(t)\} = -\omega^2 \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{u(t)\} \quad (3)$$

■ با جایگزینی معادلات (2) و (3) در معادله (1)، خواهیم داشت:

$$-\omega^2 [m] \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) + [k] \{\hat{u}\} \sin(\omega t + \theta) = \{0\}$$

■ با توجه به اینکه مقدار جملات سینوسی اختیاری بوده و قابل حذف کردن می باشد معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$([k] - \omega^2 [m]) \{\hat{u}\} = \{0\} \quad (4)$$

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

- معادله (4) یک دستگاه معادلات جبری خطی همگن است (سمت راست معادلات برابر صفر است) با  $n$  تغییرمکان مجهول  $\hat{u}_i$  و پارامتر مجهول  $\omega^2$ .
- حل این نوع معادلات یکی از مسائل مهم ریاضیات بنام «مسأله مقدار ویژه» است.
- $\{\hat{u}\}$  فقط وقتی دارای جواب غیربديهی (غیرصفر) است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد (با توجه به قاعده کرامر جواب معادلات (4) که به صورت  $\hat{u} = \frac{\{0\}}{|[k] - \omega^2[m]|}$  فقط وقتی دارای جواب غیربديهی است که دترمینان مخرج کسر صفر باشد).
- به عبارت دیگر، ارتعاشات آزاد با دامنه محدود فقط وقتی امکان پذیر است که:

$$|[k] - \omega^2[m]| = 0 \quad (5)$$

معادله (5) **معادله فرکانس سیستم** نامیده می شود.

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

6

- اگر این دترمینان در یک سیستمی که دارای  $n$  درجه آزادی است بسط یابد، یک معادله جبری از مرتبه  $n$  با پارامتر مجهول  $\omega^2$  بدست خواهد آمد.
- $n$  ریشه این معادله (یعنی  $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$ ) نشان دهنده فرکانس های  $n$  مد ارتعاشی (شکل ارتعاش سیستم) هستند که می توانند در سیستم بوجود آیند.
- مدی از ارتعاش که دارای کوچکترین فرکانس است مد اول خوانده می شود فرکانس بعدی بزرگتر از آن را مد دوم می گویند و الی آخر:  
$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_n$$
- برای ماتریس های جرم و سختی مثبت- معین، متقارن و حقیقی در سازه های پایدار، می توان ثابت کرد که کلیه ریشه های معادله فرکانس حقیقی و مثبت هستند.

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

7

برداری را که شامل کلیه فرکانس های مدها (به ترتیب بزرگی فرکانس ها) باشد بردار فرکانس  $\omega$  می خوانند:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{Bmatrix}$$

پس از محاسبه فرکانس ها (مقادیر ویژه)، با قرار دادن تک تک آنها در معادله (4)، می توان شکل ارتعاش سیستم (برداری ویژه متناظر) را در آن مد خاص پیدا کرد. از آنجا که ماتریس ضرایب معادله (4) یعنی  $([k] - \omega^2[m])$  به فرکانس بستگی دارد بنابراین برای هر مد فرق می کند.

$$([k] - \omega_i^2[m]) \{\hat{u}_i\} = \{0\} \rightarrow \{\hat{u}_i\}$$

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

■ معادله (4) عیناً ارضا شده است زیرا فرکانس‌ها بر اساس همین شرط محاسبه شده‌اند بنابراین دامنه ارتعاشات نامعین می‌باشد. باید توجه کرد که چون مقدار مطلق دامنه حرکت نامعین است،  $n-1$  مولفه تغییرمکان بر حسب یک مولفه اختیاری محاسبه خواهند شد (یعنی شکل ارتعاش سیستم را می‌توان از طریق حل کردن کلیه تغییرمکان‌ها بر حسب یکی از مولفه‌های آن بدست آورد). بنابراین نتیجه می‌گیریم که فقط نسبت‌های تغییرمکان را می‌توان تعیین کرد.

■ به خاطر سهولت، معمولاً با تقسیم کردن کلیه مولفه‌ها به یکی از مؤلفه‌های مبنا (معمولاً مؤلفه اول، و یا برای دسترسی به دقت محاسباتی بیشتر به بزرگترین مولفه) بردار تغییرمکان را به صورت بدون بعد بیان می‌کنند. بردار بدون بعد حاصل را بردار شکل مد نام می‌نامند، بنابراین:

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\hat{u}_{ki}} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1i} \\ \hat{u}_{2i} \\ \hat{u}_{3i} \\ \vdots \\ \hat{u}_{ni} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

که  $\hat{u}_{ki}$  مولفه مبنا است.

# ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی در حالت بدون میرایی

■ شکل هر کدام از  $n$  مد ارتعاش توسط همین روش به دست می آید، ماتریس مربعی را که حاوی  $n$  بردار شکل مد است ماتریس شکل مد نامیده و با  $[\phi]$  نمایش می دهند:

$$[\phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \cdots \quad \{\phi_n\}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

تغییر شکل سازه، ترکیبی از مدهای آن سازه خواهد بود.

■ باید توجه داشت که اگر چه در اینجا فقط مقدار نسبی دامنه ها به دست می آید اما به دست آوردن مقدار مطلق آنها نیز در نهایت، با اعمال شرایط اولیه امکان پذیر خواهد بود.

$$\{u(t)\} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \sin(\omega_i t - \theta_i)$$

## انواع روش‌های نرمال کردن مدها:

(۱) نرمال کردن به طوریکه سطر اول بردار شکل مد عدد یک باشد؛  $\hat{u}_{ki} = \hat{u}_{1i}$

(۲) نرمال کردن به طوریکه بزرگترین عنصر بردار شکل مد عدد یک باشد؛  $\hat{u}_{ki} = \text{Max}(\hat{u}_{1i}, \hat{u}_{2i}, \dots, \hat{u}_{ni})$

(۳) نرمال کردن به طوریکه بردار شکل مد متعامد یکه نسبت به ماتریس جرم باشد  $\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} = 1$

■ یک نتیجه مهم نرمال کردن به روش سوم دستیابی به خاصیت تعامد یکه نسبت به ماتریس جرم خواهد

بود، بدین مفهوم که:

$$[\phi]^T [m] [\phi] = [I]$$

که در رابطه فوق  $[\phi]$  ماتریس شکل مد شامل مجموعه کاملی از  $n$  مد نرمال شده و  $[I]$  ماتریس واحد  $n \times n$

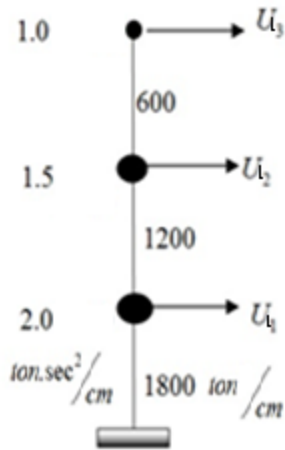
می باشد. مدهایی را که به این ترتیب نرمال می‌شوند متعامد یکه نسبت به ماتریس جرم می‌خوانند. اگر

چه که استفاده از مدهای متعامد یکه دارای سهولت زیادی برای کاربرد در برنامه‌های کامپیوتری است،

هرگاه محاسبات با دست انجام گیرد هیچ مزیت خاصی ندارند.



فرکانسها و شکل مدهای ارتعاشی سازه برشی سه طبقه زیر را تعیین نمایید.



ماتریس جرم برای این سازه با استفاده روش ماتریس جرم متمرکز عبارت است از:

$$[m] = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{tonf} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}$$

ماتریس سختی برای این سازه با استفاده از روش تعریف مستقیم عنصر عمومی ماتریس سختی عبارت است از:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 & -1200 & 0 \\ -1200 & 1800 & -600 \\ 0 & -600 & 600 \end{bmatrix} \text{tonf} / \text{cm}$$

■ برای تعیین فرکانس‌های ارتعاش سازه، معادله فرکانس سیستم را تشکیل می‌دهیم:

$$|[k] - \omega^2[m]| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3000 - 2\omega^2 & -1200 & 0 \\ -1200 & 1800 - 1.5\omega^2 & -600 \\ 0 & -600 & 600 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{با فرض } B = \omega^2 / 600 \rightarrow \begin{vmatrix} 5 - 2B & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1.5B & -1 \\ 0 & -1 & 1 - B \end{vmatrix} = 0 \rightarrow B^3 - 5.5B + 7.5B - 2 = 0$$

$$\begin{cases} B_1 = 0.351 \\ B_2 = 1.61 \\ B_3 = 3.54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 211 \\ \omega_2^2 = 960 \\ \omega_3^2 = 2125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{cases} = \begin{cases} 14.5 \\ 31.0 \\ 46.1 \end{cases} \text{ rad / s}$$

تعیین شکل مدهای ارتعاشی (نرمالیزه کردن به روش مساوی واحد قرار دادن مؤلفه اول بردار شکل مد)

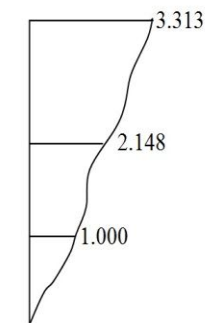
$$([k] - \omega_i^2 [m])\{\phi_i\} = \{0\} \rightarrow \begin{bmatrix} 3000 - 2\omega_i^2 & -1200 & 0 \\ -1200 & 1800 - 1.5\omega_i^2 & -600 \\ 0 & -600 & 600 - \omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1i} = 1 \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.148 \\ 3.313 \end{Bmatrix}$$

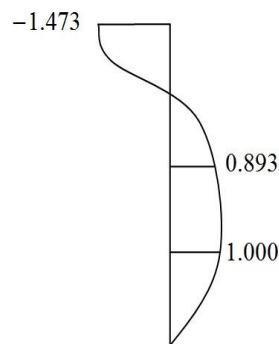
$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.893 \\ -1.473 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.040 \\ 0.405 \end{Bmatrix}$$

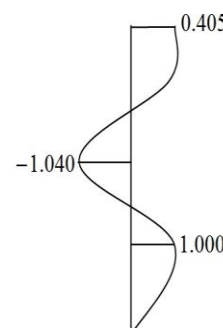
نمایش بردارهای شکل مد:



مد اول



مد دوم



مد سوم

$$\omega_1 = 14.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 31.0 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 46.1 \text{ rad/s}$$

در مدهای پایین تر چون فرکانس کمتر است امکان جذب انرژی بیشتر است، معمولاً مد اول بیشترین مقدار انرژی را جذب می کند.

# خاصیت تعامد مدهای ارتعاشی

■ بردارهای شکل مد دارای خاصیت تعامد هستند. برای نمایش این خاصیت، بردار شکل مد  $\{\hat{u}_i\}$  را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله مقادیر ویژه می‌توان نوشت:

$$[k]\{\hat{u}_i\} - \omega_i^2[m]\{\hat{u}_i\} = \{0\}$$

با پیش ضرب کردن معادله فوق توسط ترانسپوزها بردار شکل مد  $\{\hat{u}_j\}$  یعنی خواهیم داشت:

$$\{\hat{u}_j\}^T [k]\{\hat{u}_i\} - \omega_i^2 \{\hat{u}_j\}^T [m]\{\hat{u}_i\} = 0 \quad (i)$$

■ معادله مقادیر ویژه برای مد  $j$ ام بدین صورت خواهد بود:

$$[k]\{\hat{u}_j\} - \omega_j^2[m]\{\hat{u}_j\} = \{0\}$$

با پیش ضرب رابطه فوق در ترانسپوز بردار مد  $i$ ام داریم:

$$\{\hat{u}_i\}^T [k]\{\hat{u}_j\} - \omega_j^2 \{\hat{u}_i\}^T [m]\{\hat{u}_j\} = 0$$

# خاصیت تعامد مدهای ارتعاشی

چون ماتریسهای جرم  $[m]$  و سختی  $[k]$  متقارن هستند. بنابراین از نظر عملیات ماتریسی می توان رابطه فوق را بطور کلی ترانسپوز کرده و به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\{\hat{u}_j\}^T [k] \{\hat{u}_i\} - \omega_j^2 \{\hat{u}_j\}^T [m] \{\hat{u}_i\} = 0 \quad (ii)$$

■ در این مرحله طرفین رابطه (i) و (ii) را از یکدیگر کم کرده و پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\hat{u}_j\}^T [m] \{\hat{u}_i\} = 0$$

■ با شرط اینکه فرکانسهای این دو مد برابر نباشد (اگر  $i \neq j$  آنگاه  $\omega_i^2 - \omega_j^2 \neq 0$ ) اولین رابطه تعامد بدست می آید:

$$\{\hat{u}_j\}^T [m] \{\hat{u}_i\} = 0 \quad i \neq j \quad (iii)$$

رابطه فوق به رابطه تعامد مدها نسبت به ماتریس جرم موسوم است.

# خاصیت تعامد مدهای ارتعاشی

با جایگذاری معادله فوق در معادله (i) نتیجه می‌شود:

$$\{\hat{u}_j\}^T [k] \{\hat{u}_i\} = 0 \quad i \neq j \quad (iv)$$

رابطه فوق به رابطه تعامد مدها نسبت به ماتریس سختی موسوم است.

بطور کلی راحت تر است که بجای نشان دادن شرایط تعامد بر حسب دامنه‌های دلخواه، آنها را بر

حسب بردارهای شکل مد بدون بعد بیان نماییم. شرایط تعامد پس از تقسیم کردن معادلات (iii)

و (iv) بر هر تغییرمکان مبنا به صورت زیر در می‌آیند:

$$\{\phi_j\}^T [m] \{\phi_i\} = 0 \quad i \neq j$$

$$\{\phi_j\}^T [k] \{\phi_i\} = 0 \quad i \neq j$$

در سیستم‌هایی که دارای هیچ دو مدی با فرکانس مساوی نباشند: شرایط تعامد بدست آمده در دو معادله فوق بر

هر دو مد مختلف آن حاکم است، این شرایط برای دو مدی که دارای فرکانس مساوی باشند صادق نیست.

از روابط تعامد در تحلیل سازه‌های چند درجه آزادی به روش ترکیب اثر مدها استفاده خواهد شد (تبدیل

سازه چند درجه آزادی به ترکیبی از سیستم‌های یک درجه آزادی)

■ در بحث قبلی در خصوص هر سیستم دلخواه با  $n$  درجه آزادی، موقعیت تغییر مکان یافته سیستم توسط  $n$  مؤلفه تغییر مکان  $u$  تعیین می‌گردید. با این وجود در آنالیز واکنش دینامیکی سیستم‌های خطی، روش بهتری برای نشان دادن تغییر مکان‌ها توسط مدهای ارتعاش آزاد سازه وجود دارد.

■ این مدها  $n$  دسته تغییر مکان مستقل را تشکیل می‌دهند که دامنه‌های آنها می‌توانند همانند مختصات تعمیم یافته عمل کرده و برای نشان دادن هرگونه تغییر مکان بکار می‌روند.

■ بردارهای شکل مد دارای نقشی همانند توابع مثلثاتی در سری فوریه هستند و به همان دلایل نیز دارای مزیت‌هایی می‌باشند:

i. بخاطر خواص تعامد آنها

ii. و بخاطر اینکه تغییر مکان‌ها را آنقدر دقیق نشان می‌دهند که می‌توان با جملات

اندکی از آنها، تقریب‌های خوبی را بدست آورد.

■ به عنوان مثال ستون طره‌ای نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید، شکل تغییرمکان یافته این ستون توسط تغییرمکان در سه ارتفاع تعیین شده است.

■ هر بردار تغییرمکان  $\{u\}$  برای این سازه را می‌توان همچنان که در شکل نشان داده شده است، از ترکیب مناسب سه مد ارتعاش آن بدست آورد.

$$\{u\} = Y_1 \times \{\phi_1\} + Y_2 \times \{\phi_2\} + Y_3 \times \{\phi_3\}$$



به این ترتیب در یک سیستم  $n$  درجه آزادی تغییرمکان کل، از مجموع کلیه مؤلفه‌های مدی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\{u\} = \{\phi_1\}Y_1 + \{\phi_2\}Y_2 + \dots + \{\phi_n\}Y_n = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\}Y_i \quad (1)$$

$$\{u\} = [\phi]\{Y\} \quad (2)$$

از معادله فوق مشخص می‌شود که ماتریس مد بصورت عاملی برای تبدیل مختصات تعمیم یافته  $\{Y\}$  به مختصات هندسی  $\{u\}$  عمل می‌کند. این مختصات تعمیم یافته دامنه مدها را مختصات نرمال سازه می‌نامند.

■ از آنجا که ماتریس مد  $[\phi]$  در سیستمی با  $n$  درجه آزادی شامل  $n$  بردار مستقل مد می باشد، لذا غیرمنفرد بوده و قابل معکوس کردن می باشد. بنابراین همواره می توان معادله فوق را بطور مستقیم حل کرده و دامنه های مختصات نرمال  $\{Y\}$  مربوط به هر بردار تغییر مکان داده شده  $\{u\}$  را محاسبه کرد.

■ با این حال به علت خاصیت تعامد، حل کردن این دستگاه معادلات برای محاسبه  $\{Y\}$  غیرضروری است. برای محاسبه هر مختصات نرمال دلخواه  $Y_i$ ، طرفین معادله (2) را در حاصلضرب ترانسپوز بردار مد مربوطه و ماتریس جرم ضرب می کنیم:

$$\{\phi_i\}^T [m] \{u\} = \{\phi_i\}^T [m] [\phi] \{Y\} \quad (3)$$

■ طرف راست معادله را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\{\phi_i\}^T [m] [\phi] \{Y\} = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_1\} Y_1 + \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_2\} Y_2 + \dots + \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_n\} Y_n \quad (4)$$

با توجه به خاصیت تعامد مدها نسبت به ماتریس جرم، کلیه جملات این سری غیر از جمله مربوط به صفر می‌باشند، لذا با جایگزین کردن این جمله در طرف راست معادله (۳) خواهیم داشت:

$$\{\phi_i\}^T [m] \{u\} = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} Y_i$$

واز روی آن

$$Y_i = \frac{\{\phi_i\}^T [m] \{u\}}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\}} \quad (5)$$

به این ترتیب هر کدام از مختصات نرمال توسط چنین رابطه‌ای بدست می‌آیند.

# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

■ از خواص تعامد مختصات نرمال می توان برای ساده کردن معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی استفاده کرد. در حالت کلی این معادلات به صورت زیر می باشند:

$$[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = \{p(t)\} \quad (6)$$

■ با جایگزین کردن معادله (2) و مشتقات اول و دوم زمانی آن یعنی  $\{\ddot{u}\} = [\phi] \{\ddot{Y}\}$ ,  $\{\dot{u}\} = [\phi] \{\dot{Y}\}$ ,  $\{u\} = [\phi] \{Y\}$  (با توجه به اینکه مدها نسبت به زمان متغیر نمی باشند) خواهیم داشت:

$$[m] [\phi] \{\ddot{Y}\} + [c] [\phi] \{\dot{Y}\} + [k] [\phi] \{Y\} = \{p(t)\} \quad (7)$$

■ حال با پیش ضرب کردن معادله فوق در ترانسپوز بردار شکل مد  $\{\phi_i\}^T$ ، خواهیم داشت:

$$\{\phi_i\}^T [m] [\phi] \{\ddot{Y}\} + \{\phi_i\}^T [c] [\phi] \{\dot{Y}\} + \{\phi_i\}^T [k] [\phi] \{Y\} = \{\phi_i\}^T \{p(t)\} \quad (8)$$

# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

همانطور که قبلاً ملاحظه شد شرایط تعامد مدها نسبت به ماتریس های جرم و سختی:

$$\{\phi_j\}^T [m] \{\phi_i\} = 0$$

$$j \neq i$$

$$\{\phi_j\}^T [k] \{\phi_i\} = 0$$

باعث می گردد که کلیه جملات به غیر از جمله مربوط به مد  $i$  ام در عبارات جرم و سختی در معادله (8) صفر گردند. چنین کاهشی را می توان در عبارت میرایی نیز در نظر گرفت، بشرط آنکه فرض شود شرط تعامد در ماتریس میرایی نیز وجود داشته باشد، یعنی فرض شود که:

$$\{\phi_j\}^T [c] \{\phi_i\} = 0 \quad j \neq i \quad (9)$$

در اینحالت معادله (8) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} \ddot{Y}_i + \{\phi_i\}^T [c] \{\phi_i\} \dot{Y}_i + \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} Y_i = \{\phi_i\}^T \{p(t)\} \quad (10)$$

# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

اکنون علایم جدیدی را به شرح زیر تعریف می کنیم:

$$\text{جرم تعمیم یافته مد } i \text{ ام} \quad M_i = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} \quad (11-a)$$

$$\text{میرایی تعمیم یافته مد } i \text{ ام} \quad C_i = \{\phi_i\}^T [c] \{\phi_i\} \quad (11-b)$$

$$\text{سختی تعمیم یافته مد } i \text{ ام} \quad K_i = \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_i\} \quad (11-c)$$

$$\text{بار تعمیم یافته مد } i \text{ ام} \quad P_i(t) = \{\phi_i\}^T \{p(t)\} \quad (11-d)$$

که به ترتیب، جرم تعمیم یافته، میرایی تعمیم یافته، سختی تعمیم یافته و بارگذاری تعمیم یافته مختصات نرمال برای مد  $i$ ام نامیده می شوند.

با استفاده از این علایم معادله (10) به صورت زیر درمی آید که معادله حرکت سیستم چند درجه

آزادی در مد  $i$ ام می باشد:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = P_i(t) \quad (12)$$

# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

معادله (12) را بصورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i(t)}{M_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

که در آن

$$\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}, \quad \xi_i = \frac{C_i}{2M_i \omega_i} \quad (14)$$

اثبات رابطه 14:

$$[k]\{\phi_i\} = \omega_i^2 [m]\{\phi_i\} \rightarrow \{\phi_i\}^T [k][\phi_i] = \omega_i^2 \{\phi_i\}^T [m]\{\phi_i\} \rightarrow K_i = \omega_i^2 M_i$$

معمولا بسیار ساده تر و از نظر فیزیکی نیز معقول تر است که میرایی به صورت نسبت میرایی در هر مد بیان گردد (بجای آنکه ضرایب ماتریس میرایی [c] محاسبه گردد).

# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

- روش شرح داده شده در بالا را می توان به منظور بدست آوردن یک معادله یک درجه آزادی مستقل برای هر مد ارتعاش سازه بکار برد.
- بنابراین با استفاده از مختصات نرمال، معادلات حرکت از یک دستگاه  $n$  معادله دیفرانسیلی، که به علت وجود جملات غیرقطری در ماتریس های جرم و سختی و میرایی به صورت درگیر هستند به یک مجموعه از  $n$  معادله مستقل مختصات نرمال تبدیل می گردد.
- بنابراین واکنش دینامیکی از طریق حل کردن مجزای واکنش هر کدام از مختصات مدهای نرمال و ترکیب کردن آنها مطابق با معادله (2) برای بدست آوردن واکنش در مختصات اصلی، به دست می آید، و به همین خاطر این روش را روش ترکیب اثر مدها می خوانند (mode super position method)

$$\{u\} = \sum \phi_i Y_i = [\phi] \{Y\}$$



# معادلات غیر درگیر حرکت برای سیستم های چند درجه آزادی (روش ترکیب اثر مدها-آنالیز مودال)

■ غیر درگیر شدن معادلات یکی از امتیازات مهم مختصات نرمال است، اما استفاده از این مختصات دارای مزیت دیگری نیز هست که اهمیت بسیاری دارد: قسمت عمده واکنش دینامیکی غالباً ناشی از چند مد اول می باشد، لذا معمولاً می توان با کاهش تعداد بسیاری از مؤلفه ها، تقریب خوبی از واکنش را بدست آورد.

## ■ مزایای روش ترکیب اثر مدها:

- ۱- غیر درگیر شدن معادلات حرکت
- ۲- کاهش تعداد معادلات با توجه به اینکه عمده واکنش دینامیکی ناشی از چند مد اول می باشد

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\} \quad (i)$$

$$([k] - \omega^2[m])\{\phi\} = \{0\} \rightarrow \begin{matrix} \omega_1 & , & \omega_2 & , & \dots & , & \omega_n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \{\phi_1\} & & \{\phi_2\} & & & & \{\phi_n\} \end{matrix}$$

$$[\phi] = [\{\phi_1\} \ \{\phi_2\} \ \dots \ \{\phi_n\}]$$

$$\{u\} = [\phi]\{Y\} \quad (ii)$$

با پیش ضرب کردن طرفین در  $[\phi]^T$   $\rightarrow$

$$(i), (ii) \rightarrow [\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{Y}\} + [\phi]^T [c][\phi]\{\dot{Y}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{Y\} = [\phi]^T \{p(t)\}$$

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = \{P(t)\} \quad (iii)$$

$$M_{ij} = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_j\} = \begin{cases} M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$C_{ij} = \{\phi_i\}^T [c] \{\phi_j\} = \begin{cases} C_i = 2\xi_i \omega_i M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$K_{ij} = \{\phi_i\}^T [k] \{\phi_j\} = \begin{cases} K_i = \omega_i^2 M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$P_i(t) = \{\phi_i\}^T \{p(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{Y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \vdots \\ \dot{Y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

■ **توضیح:** در سیستم‌های غیر خطی، بر اثر تسلیم شدن مصالح سازه یا بر اثر تغییرات در نیروهای محوری اعضا سازه، ماتریس سختی سازه تغییر می نماید، یا ممکن است هر کدام از ضرایب تأثیر جرم و میرایی در طول پاسخ دینامیکی تغییر نماید، هر تغییری از این قبیل باعث تغییر در خواص ارتعاشی سیستم می گردد (در واقع مفهوم ساده ارتعاش آزاد در سیستم‌های غیرخطی کاربرد ندارد)، بنابراین غیردرگیر شدن مختصات نرمال معادلات حرکت امکان پذیر نمی شود.

# مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

روش ترکیب اثر مدها در آنالیز دینامیکی بر اساس تبدیل مختصات نرمال استوار گردیده است که مجموعه‌ای از  $n$  معادله درگیر حرکت سیستم چند درجه آزادی را به مجموعه‌ای از  $n$  معادله غیردرگیر تبدیل می‌کند. از این روش می‌توان برای محاسبه واکنش دینامیکی هر سازه خطی که تغییر مکان‌های آن بر حسب مجموعه‌ای از  $n$  مختصات مجزا بیان شده باشد و میرایی نیز بر حسب نسبت‌های میرایی مدی قابل بیان باشد استفاده کرد. این روش شامل گام‌های زیر می‌باشد:

## گام اول - تعیین معادلات حرکت

معادلات حرکت برای این نوع سازه‌ها عبارت است از:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\}$$

## مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

### گام دوم - تعیین فرکانس و شکل مدها :

فرکانسها و بردارهای شکل مد مربوط به  $n$  مد ارتعاش سازه از حل معادله مقدار ویژه زیر به دست می آیند :

$$([k] - \omega^2 [m]) \{ \hat{u} \} = \{ 0 \}$$

که ماتریس شکل مد ارتعاش  $[\phi]$  و بردار فرکانس  $\{\omega\}$  از آن بدست می آیند.

### گام سوم - تعیین جرم و بار تعمیم یافته

متناظر با هر بردار شکل مد  $\{\phi_i\}$ ، جرم تعمیم یافته و بار تعمیم یافته مربوط به هر مد را می توان محاسبه کرد:

$$M_i = \{\phi_i\}^T [m] \{\phi_i\} \quad , \quad P_i(t) = \{\phi_i\}^T \{p(t)\}$$

# مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

## گام چهارم - معادلات غیر درگیر حرکت

معادلات حرکت برای هر مد، با استفاده از جرم و بار تعمیم یافته برای هر مد و فرکانس مد  $\omega_i$  و مقدار مشخص شده‌ای برای نسبت میرایی مد  $\xi_i$ ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{Y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2Y_i = \frac{P_i(t)}{M_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## گام پنجم - واکنش نسبت به بارگذاری

نتیجه گام چهارم مجموعه‌ای از  $n$  معادله مستقل حرکت (برای هر مد ارتعاش یک معادله) می‌باشد. این معادلات یک درجه آزادی را می‌توان با توجه به نوع بارگذاری توسط روش مناسبی حل کرد. رابطه واکنش کلی برای هر مد مطابق روش انتگرال دیوهامل عبارت است از:

$$Y_i(t) = \frac{1}{M_i\omega_{Di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{Di}(t-\tau) d\tau \quad (15)$$

# مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

## گام ششم - واکنش ارتعاشات آزاد

جواب فوق برای سیستمی که در زمان  $t=0$  در حالت سکون باشد، صادق است. هرگاه سرعت و تغییرمکان اولیه صفر نباشد بایستی به عبارت انتگرال دیوهامل، واکنش ارتعاش آزاد برای هر مد اضافه گردد، رابطه کلی برای واکنش ارتعاش آزاد میرا شونده برای هر مد عبارت است از:

$$Y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[ \frac{\dot{Y}_i(0) + Y_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t + Y_i(0) \cos \omega_{Di} t \right] \quad (16)$$

$Y_i(0)$  و  $\dot{Y}_i(0)$  بیانگر تغییرمکان و سرعت اولیه مد  $i$ ام می‌باشند. این مقادیر را می‌توان از تغییرمکان  $\{u(0)\}$  و سرعت  $\{\dot{u}(0)\}$  داده شده در مختصات هندسی اصلی برای هر مد بدست آورد (با استفاده از معادله (5)):

$$Y_i(0) = \frac{\{\phi_i\}^T [m] \{u(0)\}}{M_i} \quad (17)$$

$$\dot{Y}_i(0) = \frac{\{\phi_i\}^T [m] \{\dot{u}(0)\}}{M_i} \quad (18)$$

واکنش ناشی از ارتعاش آزاد به واکنش نسبت به بارگذاری اضافه می‌شود.



# مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

## گام هفتم - واکنش تغییر مکان در مختصات هندسی اصلی

پس از اینکه واکنش هر مد  $Y_i(t)$  از معادله (15) یا (16) تعیین گردید (  $Y_i(t)$  مجموع این دو مقدار است)، تغییر مکانها در مختصات هندسی از تبدیل مختصات نرمال (معادله (2)) بدست می آیند:

$$\{u(t)\} = [\phi]\{Y(t)\}$$

معادله فوق را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\{u(t)\} = \{\phi_1\}Y_1(t) + \{\phi_2\}Y_2(t) + \dots + \{\phi_n\}Y_n(t)$$

که صرفا نشان دهنده عمل ترکیب نسبت به آثار مدهای مختلف است و به همین جهت روش ترکیب مدها خوانده می شود. بایستی توجه کرد که در بسیاری از انواع بارگذاریها، میزان اثر مدهای مختلف معمولا در فرکانسهای پایینتر، شدیدتر می باشد و برای فرکانسهای بالا کاهش می یابد. در نتیجه، معمولا لازم نیست که در روش ترکیب مدها، کلیه مدهای بالاتر ارتعاش را در نظر گرفت، لذا این سری را می توان به جملاتی محدود کرد که دقت مورد نظر در واکنش را بدست دهند. همچنین بایستی بخاطر داشت که مدل های ریاضی از هر سازه پیچیده ای برای تعیین مدهای بالاتر ارتعاش قابلیت اطمینان کمتری دارند، به این دلیل نیز بهتر است که در تحلیل واکنش دینامیکی تعداد مدهای در نظر گرفته شده محدود باشند.

# مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

## گام هشتم - واکنش نیروی الاستیکی

نمودار تغییر مکان سازه را می‌توان به عنوان عامل اساسی در تعیین واکنش آن نسبت به بارگذاری دینامیکی در نظر گرفت. بطور کلی، دیگر پارامترهای واکنش از قبیل تنش یا نیروهای ایجاد شده در قطعات مختلف سازه را می‌توان مستقیماً از تغییر مکان‌ها محاسبه کرد. برای مثال نیروی الاستیک  $\{f_s\}$  که در مقابل تغییر شکل سازه مقاومت می‌کند، بطور مستقیم از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\{f_s(t)\} = [k]\{u(t)\} = [k][\phi]\{Y(t)\} \quad (19)$$

نیروهای الاستیک را می‌توان از رابطه دیگری نیز به دست آورد. با نوشتن معادله فوق بر حسب ترکیب مدها:

$$\{f_s(t)\} = [k]\{\phi_1\}Y_1(t) + [k]\{\phi_2\}Y_2(t) + [k]\{\phi_3\}Y_3(t) + \dots$$

و جایگزینی معادله  $[k]\{\phi_i\} = \omega_i^2 [m]\{\phi_i\}$  خواهیم داشت:

$$\{f_s(t)\} = \omega_1^2 [m]\{\phi_1\}Y_1(t) + \omega_2^2 [m]\{\phi_2\}Y_2(t) + \omega_3^2 [m]\{\phi_3\}Y_3(t) + \dots$$

## مراحل گام به گام روش ترکیب اثر مدها

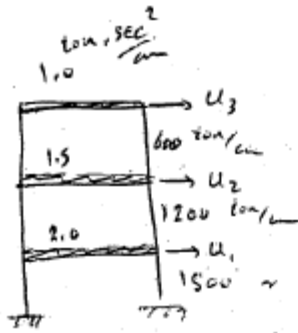
و با نوشتن عبارات سری به صورت ماتریسی:

$$\{f_s(t)\} = [m][\phi]\{\omega_i^2 Y_i(t)\} \quad (20)$$

که  $\{\omega_i^2 Y_i(t)\}$  بیانگر برداری ستونی از دامنه‌های مد است که هر کدام آنها در مربع فرکانس مد خود ضرب شده‌اند.

در معادله (20) نیروی الاستیک هر کدام از مدها با یک نیروی اینرسی مد معادل آن جایگزین شده است. معادلات این دو از معادلات تعادل ارتعاش آزاد حاصل شده است. به هر حال بایستی توجه کرد که این جایگزینی در هر زمانی حتی در تحلیل استاتیکی نیز صادق است.

از آنجا که در معادله (20) هر کدام از آثار مدها در مربع فرکانس آن ضرب شده است، مشخص می‌گردد که تأثیر مشارکت مدهای بالاتر در محاسبه نیروهای سازه از تأثیر آن در تعیین تغییرمکان‌ها بیشتر است. در نتیجه لازم می‌گردد که برای تعیین نیروها با هر تقریب موردنظر از تعداد بیشتری از مدها، نسبت به تعداد موردنیاز برای تعیین تغییرمکان‌ها استفاده کرد.



مثال :

سازه برشی سه طبقه مثال قبل تحت شرایط اول زیر

$$[u] = \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \text{ cm} \quad [k] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm/sec} \quad \text{میزان حرکت اول}$$

اگر دماش آزاد من نیاید ، و واکنش ارتعاشی آزاد نسبی را با فرض عدم وجود مبدل  
 $(\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0)$  تلف روش ترکیب ابرمد ها می باشد.

حل مسائل ۱ و ۲ : تشکیل معادلات حرکت و تعیین مرکزهای انتقال مدها

$$[M] = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ ton} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm} \quad [K] = \begin{bmatrix} 3000 & -1200 & 0 \\ -1200 & 1800 & -600 \\ 0 & -600 & 600 \end{bmatrix} \text{ ton/sec}^2 \quad \rho(\xi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\omega] = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.0 \\ 46.1 \end{Bmatrix} \text{ rad/sec} \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.148 & 0.893 & -1.040 \\ 3.313 & -1.473 & 0.405 \end{bmatrix}$$

گام ۳: جرم و بار تقسیم یافت

$$P_i(t) = [\phi_i]^T \{ p(t) \} = [\phi_i]^T \{ 0 \} = 0 \quad \text{مخ ۱، ۲، ۳}$$

$$m_i = [\phi_i]^T [m] [\phi_i]$$

$$m_1 = [\phi_1]^T [m] [\phi_1] = \begin{bmatrix} 1.000 & 2.148 & 3.313 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.148 \\ 3.313 \end{bmatrix} = 19.897 \quad \text{ton, sec}^2$$

$$m_2 = [\phi_2]^T [m] [\phi_2] = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.893 & -1.473 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.893 \\ -1.473 \end{bmatrix} = 5.366$$

$$m_3 = [\phi_3]^T [m] [\phi_3] = \begin{bmatrix} 1.000 & -1.040 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.040 \\ 0.405 \end{bmatrix} = 3.786$$

گام ۴: معادلات میرد در گریز

با توجه به عدم وجود بارگذاری خارجی و میرای داریم:

$$p_i + \omega_i^2 p_i = 0$$

گام ۵: واکنش ثابت به بارگذاری

با توجه به عدم وجود بارگذاری و واکنش نظیر این حالت برابر با صفر خواهد بود.

مثال 4: ماتریس ارتعاش آزاد

رابطه کلی برای ارتعاش ارتعاشی بدون میرایی عبارت است از:

$$\ddot{y}_i(t) = \frac{\ddot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + \dot{y}_i(0) \cos \omega_i t$$

تغییر مکان و سرعت اولیه مشخصه ثابت نام ارتعاشات (17) و (18) تعیین می شود:

$$y_i(0) = \frac{1}{m_i} [\phi_i]^T [m] [u(0)] \quad , \quad \dot{y}_i(0) = \frac{1}{m_i} [\phi_i]^T [m] [\dot{u}(0)]$$

$$y_1(0) = \frac{1}{m_1} [\phi_1]^T [m] [u(0)] = \frac{1}{19.897} \begin{bmatrix} 1.000 & 2.148 & 3.313 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.178 \text{ cm}$$

$$y_2(0) = \frac{1}{m_2} [\phi_2]^T [m] [u(0)] = \frac{1}{5.366} \begin{bmatrix} 1.000 & 0.893 & -1.473 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.074 \text{ cm}$$

$$y_3(0) = \frac{1}{m_3} [\phi_3]^T [m] [u(0)] = \frac{1}{3.786} \begin{bmatrix} 1.000 & -1.040 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.047 \text{ cm}$$

$$\dot{y}_1(0) = \frac{1}{m_1} [\phi_1]^T [m] [\dot{u}(0)] = \frac{1}{19.897} \begin{bmatrix} 1.000 & 2.148 & 3.313 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.457 \text{ cm/sec}$$

$$\dot{y}_2(0) = \frac{1}{m_2} [\phi_2]^T [m] [\dot{u}(0)] = \frac{1}{5.366} \begin{bmatrix} 1.000 & 0.893 & -1.473 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.247 \text{ cm/sec}$$

$$\dot{y}_3(0) = \frac{1}{m_3} [\phi_3]^T [m] [\dot{u}(0)] = \frac{1}{3.786} \begin{bmatrix} 1.000 & -1.040 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = -3.708$$

$$[y(t)] = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.100 \sin \omega_1 t + 0.178 \cos \omega_1 t \\ 0.072 \sin \omega_2 t + 0.074 \cos \omega_2 t \\ -0.080 \sin \omega_3 t + 0.047 \cos \omega_3 t \end{bmatrix}$$

$$[u(t)] = [\phi] [y(t)]$$

با توجه به شکل در رابطه ارتعاش آزاد:

مثال 5: ماتریس تغییر مکان و سرعت هندسی

# فصل هفتم

## میرایی در سازه ها

■ بر خلاف محاسبه ماتریس سختی ، ماتریس میرایی سازه واقعی را نمی توان بر اساس ابعاد سازه و اعضای آن و میرایی مصالح بکار رفته محاسبه نمود. چون برخلاف مدول الاستیک (که در محاسبه ماتریس سختی بکار می رود) مشخصه های میرایی مصالح بخوبی شناخته شده نیستند و بعلاوه موارد زیر نیز بر پیچیدگی محاسبه میرایی سازه می افزایند:

۱- اتلاف انرژی اصطکاکی قابل ملاحظه در اتصالات فولادی

۲- باز و بسته شدن ترک ها در بتن

۳- تحت تنش قرار گرفتن اعضای غیرسازه ای (تیغه ها، تجهیزات مکانیکی و ...)

۴- اصطکاک بین خود سازه و اجزای غیرسازه ای



- از اینروست که ماتریس میرایی سازه باید بر اساس نسبت‌های میرایی مدی تعیین گردد، به این ترتیب همه مکانیزم‌های اتلاف انرژی به حساب آورده خواهند شد.
- تخمین نسبت‌های میرایی مدی بر اساس داده‌های مربوط به سازه‌های مشابهی که طی زلزله‌های پیشین تحت نوسانات شدیدی قرار گرفته ولی تغییرشکل‌های غیرالاستیک نداده‌اند، انجام می‌گیرد.
- در صورت عدم وجود چنین داده‌هایی می‌توان از مقادیر میرایی پیشنهادی نظیر مقادیر جدول اسلاید بعدی استفاده کرد.
- مقادیر میرایی پیشنهاد شده در این جدول برای تنش‌های بهره‌برداری (مقادیر تنش کمتر از نصف نقطه تسلیم) بوده و در صورت رسیدن تنش‌ها در سازه به حد تنش تسلیم، این مقادیر افزایش چشمگیری تا بیش از دو برابر پیدا می‌کنند.

Recommended Damping Values		
فولادی جوشی	Welded Steel	% 2-3
بتن آرمه ترک خورده	R/C with Cracking	% 3-5
بتن آرمه بدون ترک	R/C no Cracking	% 2
چوبی	Wood	% 6-7
فولادی پیچی	Bolted Steel	% 5
بنایی غیر مسلح	Unreinforced Masonry	% 3
بنایی مسلح	Reinforced Masonry	% 7

■ لازم به تذکر است که اغلب آیین‌نامه‌های ساختمانی تغییری برای نسبت میرایی سازه بر اساس مصالح مورد استفاده در نظر نگرفته و مقدار متداول میرایی را ۵٪ در نظر گرفته اند.

# تعیین ماتریس میرایی در سیستم های چند درجه آزادی

**سوال:** در چه مواردی ضروری است ماتریس میرایی تعیین شود؟

**جواب:** در مواردی که تحلیل مدی کلاسیک (روش ترکیب اثر مدها) Classical Modul Analysis قابل بکارگیری نیست، این موارد عبارتند از:

- ۱- سازه های با میرایی غیر کلاسیک، حتی اگر منظور محاسبه پاسخ الاستیک خطی سازه باشد.
- ۲- سیستم های غیر خطی، حتی با میرایی کلاسیک. نظیر تحلیل پاسخ سازه تحت زلزله شدید

## سیستم های با میرایی کلاسیک (Classical Damping):

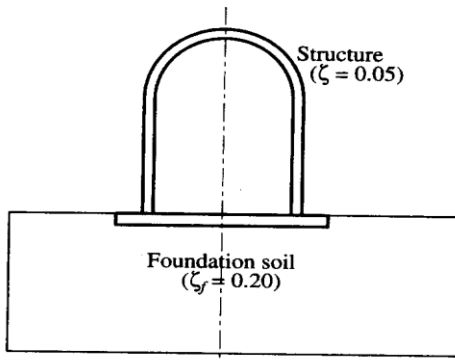
سیستم های با توزیع مکانیزم های میرایی مشابه در کل سازه، نظیر ساختمان چند طبقه با سیستم سازه ای و مصالح مشابه در کل ارتفاع.

# تعیین ماتریس میرایی در سیستم های چند درجه آزادی

## سیستم های با میرایی غیر کلاسیک (Nonclassical Damping):

سیستم هایی که از دو یا چند بخش با مشخصه های میرایی بسیار متفاوت تشکیل می شوند. نظیر موارد زیر:

مثال ۱: یک سیستم خاک و سازه (soil- structure system)



مثال ۲: یک سد بتونی با آب پشت آن. میرایی آب در مقایسه با میرایی سد قابل صرف نظر است.

مثال ۳: سازه های مجهز به ابزارهای اتلاف انرژی و یا سیستم جداسازی پایه حتی اگر خود سازه به تنهایی دارای میرایی کلاسیک باشد.

درواقع روش ترکیب اثر مدها فقط در مورد سیستم های خطی با میرایی کلاسیک قابل استفاده است.

- همانطور که قبلا اشاره شد، هیچ روش تحلیلی analytical برای تعیین میرایی وجود ندارد و استفاده از نتایج تجربی بهترین روش برای ارزیابی میرایی سازه است.
- ماتریس میرایی سازه [C] براساس نسبت‌های میرایی مدی و با فرض برقرار بودن شرایط تعامد مدها نسبت به ماتریس میرایی تعیین می‌شود.

$$[\phi]^T [c][\phi] = [C]$$

ماتریس میرایی تعمیم‌یافته [C] در رابطه فوق یک ماتریس قطری می‌باشد.

- پنج روش برای انتخاب [c] وجود دارد که در ادامه این پنج روش تشریح می‌گردد.

## Mass Proportional Damping

■ در این روش میرایی متناسب با جرم سازه در نظر گرفته می شود:

$$[c] \propto [m]$$

$$[c] = \alpha_0 [m]$$

ضریب تناسب  $\alpha_0$  دارای واحد  $\text{sec}^{-1}$  خواهد بود

$$[\phi]^T [c] [\phi] = \alpha_0 [\phi]^T [m] [\phi]$$

ماتریس میرایی تعمیم یافته

$$[C] = \alpha_0 [M] \quad \text{ماتریس جرم تعمیم یافته}$$

$$C_i = \alpha_0 M_i$$

$$2 \xi_i \omega_i M_i = \alpha_0 M_i$$

$$\xi_i = \frac{\alpha_0}{2\omega_i} \quad (i)$$

## Mass Proportional Damping

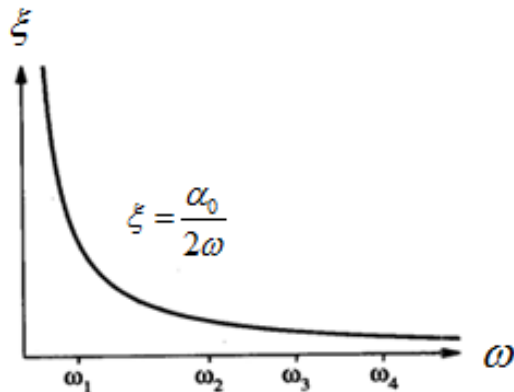
در این روش با فرض معلوم بودن نسبت میرایی تنها در یکی از مدها نظیر مد  $i$  ام (غالبا مد اول) ضریب  $\alpha_0$  تعیین می شود.

$$\alpha_0 = 2 \xi_i \omega_i (= 2 \xi_1 \omega_1 \text{ برای مد اول})$$

به این ترتیب برای هر مد دیگر نظیر مد  $j$  ام به کمک رابطه (i) می توان نسبت میرایی را تعیین کرد.

$$\xi_j = \frac{\alpha_0}{2\omega_j} = \frac{2\xi_i\omega_i}{2\omega_j} = \frac{\xi_i\omega_i}{\omega_j} (= \frac{\xi_1\omega_1}{\omega_j} \text{ با فرض معلوم بودن } \xi_1)$$

تغییرات نسبت های میرایی مدی با فرکانس های طبیعی مربوطه در شکل نشان داده شده است. نتایج حاصله از این روش با نتایج تجربی مطابقت ندارد.



## Stiffnes Proportional Damping

■ در این روش میرایی متناسب با سختی سازه در نظر گرفته می شود:

$$[c] \propto [k]$$

$$[c] = \alpha_1 [k]$$

$$[\phi]^T [c] [\phi] = \alpha_1 [\phi]^T [k] [\phi]$$

$$[C] = \alpha_1 [K]$$

$$C_i = \alpha_1 K_i \Rightarrow 2 \xi_i \omega_i M_i = \alpha_1 \omega_i^2 M_i$$

$$\xi_i = \frac{\alpha_1 \omega_i}{2} \quad (ii)$$



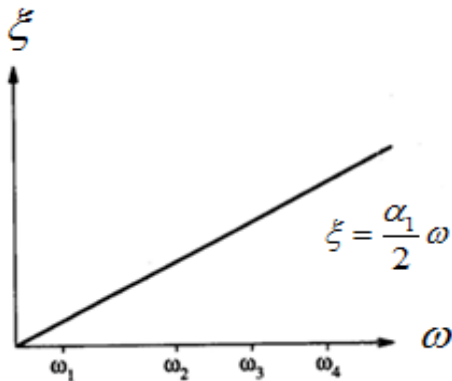
## Stiffnes Proportional Damping

■ در این روش نیز با فرض معلوم بودن نسبت میرایی تنها در یکی از مدها نظیر مد  $i$  ام (غالبا مد اول) ضریب  $\alpha_1$  تعیین می شود.

$$\alpha_1 = \frac{2\xi_i}{\omega_i}$$

نسبت میرایی هر مد دیگر  $\xi_j = \frac{\alpha_1 \omega_j}{2} = \left( \frac{2\xi_i}{\omega_i} \right) \frac{\omega_j}{2} = \frac{\xi_i \omega_j}{\omega_i} \left( = \frac{\xi_1 \omega_j}{\omega_1} \right)$  ( با فرض معلوم بودن  $\xi_1$  )

نتایج حاصل از این روش نیز با نتایج تجربی مطابقت ندارد.



## Rayleigh Damping

یک ماتریس میرایی کلاسیک که نتایج حاصل از آن مطابقت خوبی با نتایج تجربی دارد، ماتریس میرایی رایلی است.

در این روش میرایی همزمان متناسب با جرم و سختی سازه در نظر گرفته می‌شود:

$$[c] = \alpha_0 [m] + \alpha_1 [k]$$

$$[\phi]^T [c] [\phi] = \alpha_0 [\phi]^T [m] [\phi] + \alpha_1 [\phi]^T [k] [\phi]$$

$$[C] = \alpha_0 [M] + \alpha_1 [K]$$

$$C_i = \alpha_0 M_i + \alpha_1 K_i \Rightarrow 2 \xi_i \omega_i M_i = \alpha_0 M_i + \alpha_1 \omega_i^2 M_i$$

$$\xi_i = \frac{\alpha_0}{2} \frac{1}{\omega_i} + \frac{\alpha_1}{2} \omega_i \quad (iii)$$

## Rayleigh Damping

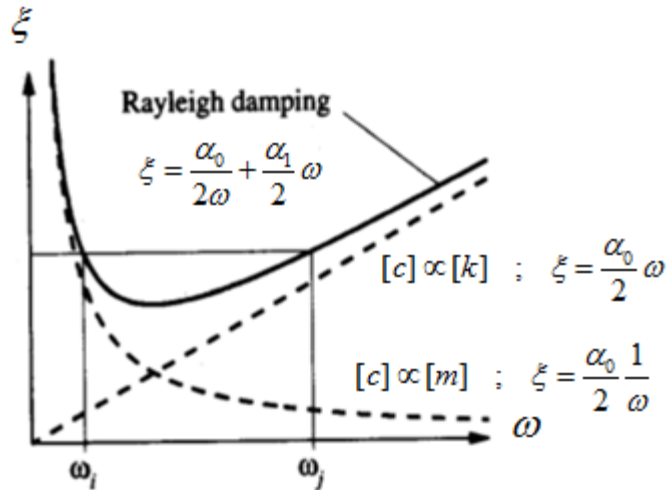
■ در این روش با فرض معلوم بودن نسبت‌های میرایی در دو مد مختلف  $i$  ام و  $j$  ام، و به کمک روابط فوق ضرایب  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$ ، که ضرایب جرم و سختی رایلی نامیده می‌شوند، تعیین می‌گردند.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\omega_i} \alpha_0 + \frac{\omega_i}{2} \alpha_1 = \xi_i \\ \frac{1}{2\omega_j} \alpha_0 + \frac{\omega_j}{2} \alpha_1 = \xi_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2\omega_i\omega_j(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \\ \alpha_1 = \frac{2(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \end{cases}$$

■ با معلوم شدن ضرایب  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  نسبت میرایی هر مد دیگری از سازه را می‌توان به کمک رابطه (iii) تعیین نمود.

## Rayleigh Damping

14



تغییرات نسبت‌های میرایی مدی با فرکانس‌های طبیعی در شکل مقابل نشان داده شده است.

در مسائل عملی مدهای با میرایی معلوم  $i$  و  $j$  باید به نحوی انتخاب شوند که نسبت میرایی مدهایی که مشارکت عمده‌ای در پاسخ سازه دارند، مقادیر معقولی باشند.

به عنوان مثال حالتی را در نظر می‌گیریم که پنج مد اول در تحلیل پاسخ سازه در نظر گرفته شده و میرایی تقریباً یکسان  $\xi$  برای همه مدها مدنظر باشد. در این صورت  $\xi$  باید برای مد اول و احتمالاً مد چهارم معلوم دانسته شود. با توجه به نمودار فوق نسبت‌های میرایی مدهای دوم و سوم قدری کمتر از  $\xi$  و برای مد پنجم قدری بزرگتر از  $\xi$  خواهد بود. نسبت‌های میرایی مدهای بالاتر بطور یکنواخت با افزایش فرکانس، افزایش یافته و پاسخ‌های مدی مربوطه با توجه به میرایی بالای آنها حذف خواهد شد.

در صورتی که بخواهیم نسبت میرایی در بیش از دو مد (هر تعداد دلخواهی از مدها) معلوم دانسته شود از روش میرایی کوشی می‌توانیم استفاده کنیم. هر ترکیبی به صورت زیر می‌تواند یک ماتریس متعامد میرایی باشد:

$$[c] = [m] \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b \left( [m]^{-1} [k] \right)^b \quad (i)$$

برای اثبات خاصیت تعامد ماتریس فوق، شش جمله از این ماتریس ذیلا مورد بررسی قرار گرفته است:

$$b = 0 \quad \alpha_0 [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^0 = \alpha_0 [m] \quad \text{میرایی متناسب با جرم}$$

$$b = 1 \quad \alpha_1 [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^1 = \alpha_1 [k] \quad \text{میرایی متناسب با سختی}$$

$$b = 2 \quad \alpha_2 [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^2 = \alpha_2 [m] [m]^{-1} [k] [m]^{-1} [k] = \alpha_2 [k] [m]^{-1} [k]$$

$$b = 3 \quad \alpha_3 [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^3 = \alpha_3 [m] [m]^{-1} [k] [m]^{-1} [k] [m]^{-1} [k] = \alpha_3 [k] [m]^{-1} [k] [m]^{-1} [k]$$

$$b = -1 \quad \alpha_{-1} [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^{-1} = \alpha_{-1} [m] [k]^{-1} [m]$$

$$b = -2 \quad \alpha_{-2} [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^{-2} = \alpha_{-2} [m] \left( [m]^{-1} [k] \right)^{-1} \left( [m]^{-1} [k] \right)^{-1} = \alpha_{-2} [m] [k]^{-1} [m] [k]^{-1} [m]$$

یعنی لازم است ثابت شود ماتریس‌هایی با شکل کلی زیر متعامد می‌باشند:

$$[k]([m]^{-1}[k])^h \quad h = 0,1,2,\dots \quad (ii)$$

,

$$[m]([k]^{-1}[m])^h \quad h = 0,1,2,\dots \quad (iii)$$

■ اثبات متعامد بودن دسته ماتریس‌های (ii) :

از روابط مساله مقدار ویژه داریم:

$$[k]\{\phi_j\} = \omega_j^2 [m]\{\phi_j\} \quad (iv)$$

for  $b = 2$ :

$$\{\phi_i\}^T [k][m]^{-1}[k]\{\phi_j\} = \omega_j^2 \{\phi_i\}^T [k][m]^{-1}[m]\{\phi_j\} = \omega_j^2 \{\phi_i\}^T [k]\{\phi_j\} = \begin{cases} \omega_i^2 K_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} (\omega_i^2)^2 M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (v)$$

for  $b = 3$ :

$$\{\phi_i\}^T [k][m]^{-1}[k][m]^{-1}[k]\{\phi_j\} = \omega_j^2 \{\phi_i\}^T [k][m]^{-1}[k][m]^{-1}[m]\{\phi_j\} = \omega_j^2 \{\phi_i\}^T [k][m]^{-1}[k]\{\phi_j\} = \begin{cases} (\omega_i^2)^3 M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (v)$$

■ اثبات متعامد بودن دسته ماتریس های (iii) :

$$(iv) \Rightarrow [m]\{\phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} [k]\{\phi_j\} \quad (vi)$$

for  $b = -1$ :

$$\{\phi_i\}^T [m][k]^{-1} [m]\{\phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} \{\phi_i\}^T [m][k]^{-1} [k]\{\phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} \{\phi_i\}^T [m]\{\phi_j\} = \begin{cases} (\omega_i^2)^{-1} M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (vii)$$

for  $b = -2$ :

$$\{\phi_i\}^T [m][k]^{-1} [m][k]^{-1} [m]\{\phi_j\} = \frac{1}{\omega_j^2} \{\phi_i\}^T [m][k]^{-1} [m][k]^{-1} [k]\{\phi_j\} \stackrel{(vii)}{=} \begin{cases} (\omega_i^2)^{-2} M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

■ با مقایسه مجموعه روابط فوق نتیجه می شود:

$$\{\phi_i\}^T [m]([m]^{-1}[k])^b \{\phi_j\} \begin{cases} (\omega_i^2)^b M_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (viii)$$

رابطه فوق بدین مفهوم است که هر جمله از رابطه (i) یک ماتریس متعامد است.

$$[c] = [m] \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b ([m]^{-1} [k])^b \quad (i)$$

$$[\phi]^T [c] [\phi] = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b [\phi]^T [m] ([m]^{-1} [k])^b [\phi]$$

$$C_i = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b (\omega_i^2)^b M_i$$

$$2\xi_i \omega_i M_i = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b \omega_i^{2b} M_i$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \alpha_b \omega_i^{2b-1} \quad (ix)$$

- ضرایب  $\alpha_b$  را می‌توان با مشخص کردن نسبت‌های میرایی هر ژمد سیستم، مثلا ژمد اول و حل ژمعادله جبری برای  $j=1$  تا  $j=0$  و  $\alpha_j$  تعیین نمود و سپس ضرایب میرایی سایر مدها از طریق رابطه (ix) قابل تعیین خواهد بود.
- مقادیر  $b$  در هر محدوده ای از  $-\infty < b < \infty$  می‌تواند باشد، لیکن در عمل بهتر است مقادیر انتخاب شده حتی‌المقدور نزدیک به صفر و مثبت باشند.



■ مثلاً اگر سه نسبت میرایی  $\xi_i$  و  $\xi_j$  و  $\xi_p$  معلوم فرض شوند، در صورت انتخاب  $b = 0, 1, 2$  خواهیم داشت:

$$\xi_i = \frac{1}{2} (\alpha_0 \omega_i^{-1} + \alpha_1 \omega_i + \alpha_2 \omega_i^3)$$

$$\xi_j = \frac{1}{2} (\alpha_0 \omega_j^{-1} + \alpha_1 \omega_j + \alpha_2 \omega_j^3)$$

$$\xi_p = \frac{1}{2} (\alpha_0 \omega_p^{-1} + \alpha_1 \omega_p + \alpha_2 \omega_p^3)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_i^{-1} & \omega_i & \omega_i^3 \\ \omega_j^{-1} & \omega_j & \omega_j^3 \\ \omega_p^{-1} & \omega_p & \omega_p^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \\ \xi_p \end{Bmatrix} \rightarrow \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$

$$[c] = \alpha_0 [m] + \alpha_1 [k] + \alpha_2 [k][m]^{-1}[k]$$

## الف - ۵- ترکیب آثار ماتریس های میرایی مدی

### Superposition of Modal Damping Matrixes

20

در این روش فرض می شود نسبت های میرایی تمامی مدها معلوم باشند یعنی با فرض معلوم بودن  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  و با توجه به خاصیت تعامد ماتریس میرایی داریم:

$$[\phi]^T [c] [\phi] = [C] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_nM_n \end{bmatrix}$$

به این ترتیب با معلوم بودن ماتریس میرایی تعمیم یافته و با توجه به رابطه فوق می توان ماتریس میرایی را از رابطه زیر تعیین نمود:

$$[c] = \left([\phi]^T\right)^{-1} [C] [\phi]^{-1}$$

## Superposition of Modal Damping Matrixes

■ با توجه به پیچیدگی محاسبه معکوس ماتریس شکل مدها،  $[\phi]^{-1}$ ، بهتر است با استفاده از خاصیت تعامد مدها نسبت به ماتریس جرم، محاسبه این ماتریس به طریق ساده زیر انجام گیرد:

$$[M] = [\phi]^T [m] [\phi]$$

$$[I] = [M]^{-1} [M] = [M]^{-1} ([\phi]^T [m] [\phi]) = \underbrace{([M]^{-1} [\phi]^T [m])}_{[\phi]^{-1}} [\phi] = [\phi]^{-1} [\phi]$$

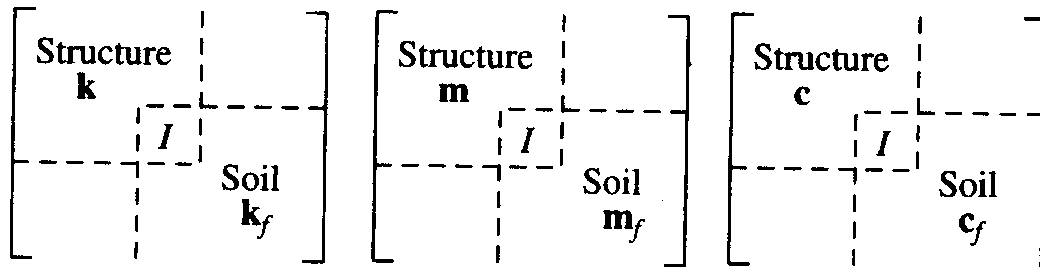
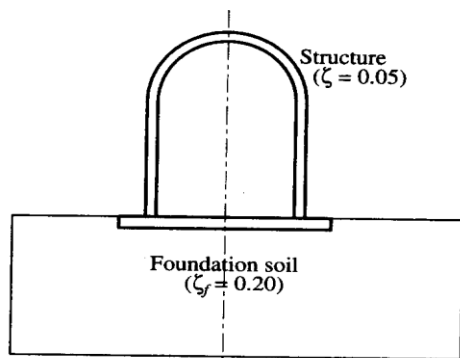
$$[\phi]^{-1} = [M]^{-1} [\phi]^T [m]$$

در سیستم‌های با میرایی غیر کلاسیک که از دو یا چند بخش با مشخصه‌های میرایی بسیار متفاوت تشکیل می‌شوند برای تعیین ماتریس میرایی کل سیستم به ترتیب زیر عمل می‌شود:

i. ابتدا ماتریس‌های میرایی برای هر یک از زیر سیستم‌ها (سازه و خاک؛ سد و آب؛ سازه و ابزار اتلاف

انرژی یا ایزولاتورها) با فرض اینکه هر زیرسیستم به تنهایی سیستمی با میرایی کلاسیک باشد، بطور جداگانه محاسبه می‌شود؛

ii. سپس نظیر ماتریس‌های جرم و سختی، ماتریس میرایی کل سیستم از سرهم بندی کردن ماتریس‌های میرایی این زیر سیستم‌ها به دست می‌آید.



I نشان دهنده درجات آزادی در فصل مشترک Interface زیرسیستم‌ها است.